

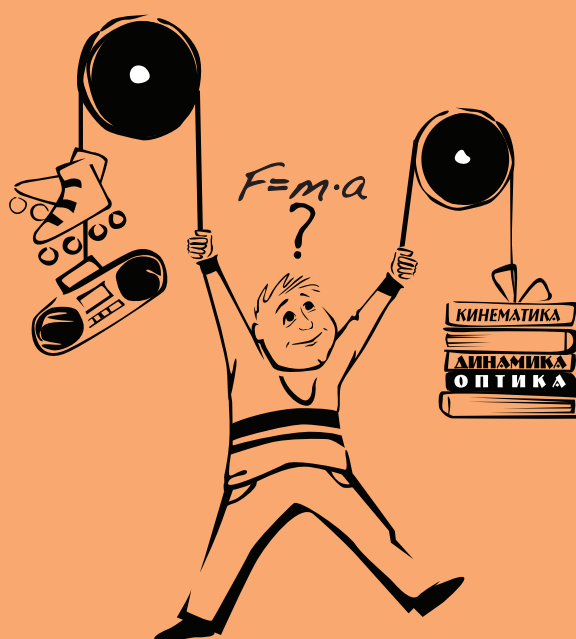


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИКА

ЗАДАЧИ ПРОФИЛЬНОГО
ЭКЗАМЕНА И ОЛИМПИАД
ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ
В МГУ – 2012

(с подробными решениями)



Москва
2012

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ФИЗИКА
ЗАДАЧИ ПРОФИЛЬНОГО
ЭКЗАМЕНА И ОЛИМПИАД
ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ
В МГУ – 2012
(с подробными решениями)

Москва
Физический факультет МГУ
2012

УДК 530.1
3153
ББК 74.58.729

**Физика. Задачи профильного экзамена и олимпиад
для школьников в МГУ – 2012** /Под ред. В.А. Макарова.
– М.: Физический факультет МГУ, 2012. – 104 с.: ил.
ISBN 978-5-8279-0112-9

Сборник содержит материалы профильного вступительного экзамена и олимпиад для школьников по физике, проводившихся в МГУ в 2011 – 2012 годах. В начале сборника помещена Программа по физике для поступающих в МГУ. Далее следуют условия задач двух олимпиад по физике, вошедших в Перечень олимпиад школьников на 2011/2012 учебный год, утвержденный Минобразования РФ, а именно, двухтуровой олимпиады «Покори Воробьевы горы – 2012» и двухтуровой олимпиады «Ломоносов – 2011/2012». Кроме того, в сборник включены задачи дистанционной Интернет–олимпиады «Шаг в физику – 2011». В конце первой части сборника помещены задания профильного экзамена по физике, проводившегося на физическом факультете МГУ и в его Севастопольском филиале.

Во второй части сборника приведены подробные решения всех задач, содержащие обоснования применимости используемых законов и допущений, а также анализ полученных ответов.

Для учащихся старших классов, абитуриентов, учителей и преподавателей, ведущих занятия по физике со школьниками.

Авторский коллектив:

Боков П.Ю., Буханов В.М., Вишнякова Е.А., Гайдукова И.Ю.,
Грачев А.В., Зотеев А.В., Козлов С.Н., Лукашева Е.В.,
Нагорский Н.М., Нетребко Н.В., Никитин С.Ю., Парфенов К.В.,
Погожев В.А., Полякова М.С., Поляков П.А., Скипетрова Л.А.,
Склянкин А.А., Чесноков С.С., Чистякова Н.И., Чичигина О.А.,
Шленов С.А.

ISBN 978-5-8279-0112-9

© Авторский коллектив, 2012 г.
© Физический факультет МГУ, 2012 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Программа вступительных испытаний по физике		4
	Условия	Решения
Олимпиада «Покори Воробьевы горы – 2012»	15	45
I. Заочный тур	15	45
Задание для 7-х – 8-х классов	15	45
Задание для 9-х – 11-х классов	17	47
II. Очный тур	19	59
Задание для 7-х – 9-х классов	19	59
Задание для 10-х – 11-х классов	20	61
Олимпиада «Ломоносов – 2011/2012»	26	75
I. Отборочный этап	26	75
II. Заключительный этап	32	87
Интернет-олимпиада «Шаг в физику-2011»	34	89
Задание для 7-го класса	34	89
Задание для 8-го класса	35	90
Задание для 9-го класса	36	91
Задание для 10-го класса	37	93
Задание для 11-го класса	39	96
Профильный экзамен 2012	41	99
I. Механика	41	99
II. Молекулярная физика и термодинамика	42	100
III. Электродинамика	43	101
IV. Оптика	44	102

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ ПО ФИЗИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В МГУ^{*)}

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Настоящая программа составлена на основе ныне действующих учебных программ для школ и классов с углубленным изучением физики.

При подготовке к экзамену основное внимание следует уделить выявлению сущности физических законов и явлений, умению истолковывать физический смысл величин и понятий, а также умению применять теоретический материал к решению задач. Необходимо уметь пользоваться при вычислениях системой СИ и знать внесистемные единицы, указанные в программе.

Глубина ответов на пункты программы определяется содержанием опубликованных учебников для школ и классов с углубленным изучением физики, указанных в конце настоящей программы.

1. МЕХАНИКА

1.1. Кинематика

Механическое движение. Относительность механического движения. Материальная точка. Система отсчета. Траектория. Вектор перемещения и его проекции. Путь.

Скорость. Сложение скоростей.

Ускорение. Сложение ускорений.

Прямолинейное равномерное и равнопеременное движения. Зависимости скорости, координат и пути от времени.

Криволинейное движение. Движение по окружности. Угловая скорость. Период и частота обращения. Ускорение тела при движении по окружности. Тангенциальное и нормальное ускорения.

Свободное падение тел. Ускорение свободно падающего тела. Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Дальность и высота полета.

Поступательное и вращательное движения твердого тела.

^{*)} Программа утверждена на заседании Ученого совета МГУ 8 декабря 2003 г.

1.2. Динамика

Взаимодействие тел. Первый закон Ньютона. Понятие об инерциальных и неинерциальных системах отсчета. Принцип относительности Галилея.

Сила. Силы в механике. Сложение сил, действующих на материальную точку.

Инертность тел. Масса. Плотность.

Второй закон Ньютона. Единицы измерения силы и массы

Третий закон Ньютона.

Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная. Сила тяжести. Зависимость силы тяжести от высоты.

Силы упругости. Понятие о деформациях. Закон Гука. Модуль Юнга.

Силы трения. Сухое трение: трение покоя и трение скольжения. Коэффициент трения. Вязкое трение.

Применение законов Ньютона к поступательному движению тел. Вес тела. Невесомость. Перегрузки.

Применение законов Ньютона к движению материальной точки по окружности. Движение искусственных спутников. Первая космическая скорость.

1.3. Законы сохранения в механике

Импульс (количество движения) материальной точки. Импульс силы. Связь между приращением импульса материальной точки и импульсом силы. Импульс системы материальных точек. Центр масс системы материальных точек. Закон сохранения импульса. Реактивное движение.

Механическая работа. Мощность. Энергия. Единицы измерения работы и мощности.

Кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек. Связь между приращением кинетической энергии тела и работой приложенных к телу сил.

Потенциальная энергия. Потенциальная энергия тел вблизи поверхности Земли. Потенциальная энергия упруго деформированного тела.

Закон сохранения механической энергии.

1.4. Статика твердого тела

Сложение сил, приложенных к твердому телу. Момент силы относительно оси вращения. Правило моментов.

Условия равновесия тела. Центр тяжести тела. Устойчивое, неустойчивое и безразличное равновесия тел.

1.5. Механика жидкостей и газов

Давление. Единицы измерения давления: паскаль, мм рт. ст.

Закон Паскаля. Гидравлический пресс. Давление жидкости на дно и стенки сосуда. Сообщающиеся сосуды.

Атмосферное давление. Опыт Торричелли. Изменение атмосферного давления с высотой.

Закон Архимеда для тел, находящихся в жидкости или газе. Плавание тел.

Движение жидкостей. Уравнение Бернулли.

1.6. Механические колебания и волны. Звук

Понятие о колебательном движении. Период и частота колебаний.

Гармонические колебания. Смещение, амплитуда и фаза при гармонических колебаниях.

Свободные колебания. Колебания груза на пружине. Математический маятник. Периоды их колебаний. Превращения энергии при гармонических колебаниях. Затухающие колебания.

Вынужденные колебания. Резонанс.

Понятие о волновых процессах. Поперечные и продольные волны. Длина волны. Скорость распространения волн. Фронт волны. Уравнение бегущей волны. Стоячие волны.

Интерференция волн. Принцип Гюйгенса. Дифракция волн.

Звуковые волны. Скорость звука. Громкость и высота звука.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

2.1. Основы молекулярно-кинетической теории

Основные положения молекулярно-кинетической теории и их опытное обоснование. Броуновское движение. Масса и размер молекул. Моль вещества. Постоянная Авогадро. Характер движения молекул в газах, жидкостях и твердых телах.

Тепловое равновесие. Температура и ее физический смысл. Шкала температур Цельсия.

Идеальный газ. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа. Средняя кинетическая энергия молекул и температура. Постоянная Больцмана. Абсолютная температурная шкала.

Уравнение Клапейрона-Менделеева (уравнение состояния идеального газа). Универсальная газовая постоянная. Изотермический, изохорный и изобарный процессы.

2.2. Элементы термодинамики

Термодинамическая система. Внутренняя энергия системы. Количество теплоты и работа как меры изменения внутренней энергии. Теплоемкость тела. Понятие об адиабатическом процессе. Первый закон термодинамики. Применение первого закона термодинамики к изотермическому, изохорному и изобарному процессам. Расчет работы

газа с помощью pV -диаграмм. Теплоемкость одноатомного идеального газа при изохорном и изобарном процессах.

Необратимость процессов в природе. Второй закон термодинамики. Физические основы работы тепловых двигателей. КПД теплового двигателя и его максимальное значение.

2.3. Изменение агрегатного состояния вещества

Парообразование. Испарение, кипение. Удельная теплота парообразования. Насыщенный пар. Зависимость давления и плотности насыщенного пара от температуры. Зависимость температуры кипения от давления. Критическая температура.

Влажность. Относительная влажность.

Кристаллическое и аморфное состояние вещества. Удельная теплота плавления.

Уравнение теплового баланса.

2.4. Поверхностное натяжение в жидкостях

Сила поверхностного натяжения. Явления смачивания и несмачивания. Давление под искривленной поверхностью жидкости. Капиллярные явления.

2.5. Тепловое расширение твердых тел и жидкостей

Тепловое линейное расширение. Тепловое объемное расширение. Тепловое расширение жидкостей. Особенности теплового расширения воды.

3. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

3.1. Электростатика

Электрические заряды. Элементарный электрический заряд. Проводники и диэлектрики. Закон сохранения электрического заряда.

Взаимодействие электрически заряженных тел. Электроскоп. Точечный заряд. Закон Кулона.

Электрическое поле. Напряженность электрического поля. Линии напряженности электрического поля (силовые линии). Однородное электрическое поле. Напряженность электростатического поля точечного заряда. Принцип суперпозиции полей. Теорема Гаусса. Поле равномерно заряженных плоскости, сферы и шара.

Работа сил электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Связь разности потенциалов с напряженностью электростатического поля. Потенциал поля точечного заряда. Эквипотенциальные поверхности.

Проводники и диэлектрики в электростатическом поле. Диэлектрическая проницаемость вещества. Электроемкость. Конденсаторы. Поле плоского конденсатора. Электроемкость плоского конденсатора. Последовательное и параллельное соединение конденсаторов. Энергия заряженного конденсатора.

Энергия электрического поля.

3.2. Постоянный ток

Электрический ток. Сила тока. Условия существования тока в цепи. Электродвижущая сила (ЭДС). Напряжение.

Закон Ома для участка цепи. Омическое сопротивление проводника. Удельное сопротивление. Зависимость удельного сопротивления от температуры. Сверхпроводимость. Последовательное и параллельное соединение проводников. Измерение силы тока, напряжения и сопротивления.

Закон Ома для полной цепи. Источники тока, их соединение. Правила Кирхгофа.

Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца.

Электрический ток в металлах.

Электрический ток в электролитах. Законы электролиза.

Электрический ток в вакууме. Термоэлектронная эмиссия. Электронная лампа – диод. Электронно-лучевая трубка.

Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников. Зависимость проводимости полупроводников от температуры. *p-n* – переход и его свойства. Полупроводниковый диод. Транзистор. Термистор и фоторезистор.

Электрический ток в газах. Самостоятельный и несамостоятельный разряды. Понятие о плазме.

3.3. Магнетизм

Магнитное поле. Действие магнитного поля на рамку с током. Индукция магнитного поля (магнитная индукция). Линии магнитной индукции. Картины магнитного поля прямого тока и соленоида. Понятие о магнитном поле Земли.

Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Закон Ампера.

Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.

Магнитные свойства вещества. Гипотеза Ампера. Ферромагнетика.

3.4. Электромагнитная индукция

Магнитный поток. Опыты Фарадея. Явление электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца.

Самоиндукция. Индуктивность. ЭДС самоиндукции.

Энергия магнитного поля тока.

3.5. Электромагнитные колебания и волны

Переменный электрический ток. Амплитудное и действующее (эффективное) значение периодически изменяющегося напряжения и тока.

Получение переменного тока с помощью индукционных генераторов. Трансформатор. Передача электрической энергии.

Колебательный контур. Свободные электромагнитные колебания в контуре. Превращение энергии в колебательном контуре. Уравнение, описывающее процессы в колебательном контуре, и его решение. Формула Томсона для периода колебаний. Затухающие электромагнитные колебания.

Вынужденные колебания в электрических цепях. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления в цепи гармонического тока. Резонанс в электрических цепях.

Открытый колебательный контур. Опыты Герца. Электромагнитные волны. Их свойства. Шкала электромагнитных волн. Излучение и прием электромагнитных волн. Принципы радиосвязи.

4. ОПТИКА

4.1. Геометрическая оптика

Развитие взглядов на природу света. Закон прямолинейного распространения света. Понятие луча.

Интенсивность (плотность потока) излучения. Световой поток. Освещенность.

Законы отражения света. Плоское зеркало. Сферическое зеркало. Построение изображений в плоском и сферическом зеркалах.

Законы преломления света. Абсолютный и относительный показатели преломления. Ход лучей в призме. Явление полного (внутреннего) отражения.

Тонкие линзы. Фокусное расстояние и оптическая сила линзы. Построение изображения в собирающих и рассеивающих линзах. Формула линзы. Увеличение, даваемое линзами.

Оптические приборы: лупа, фотоаппарат, проекционный аппарат, микроскоп. Ход лучей в этих приборах. Глаз.

4.2. Элементы физической оптики

Волновые свойства света. Поляризация света. Электромагнитная природа света.

Скорость света в однородной среде. Дисперсия света. Спектроскоп. Инфракрасное и ультрафиолетовое излучения.

Интерференция света. Когерентные источники. Условия образования максимумов и минимумов в интерференционной картине.

Дифракция света. Опыт Юнга. Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракционная решетка.

Корпускулярные свойства света. Постоянная Планка. Фотоэффект. Законы фотоэффекта. Фотон. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Давление света. Опыты Лебедева по измерению давления света.

Постулаты теории относительности (постулаты Эйнштейна). Связь между массой и энергией.

5. АТОМ И АТОМНОЕ ЯДРО

Опыты Резерфорда по рассеянию α -частиц. Планетарная модель атома. Квантовые постулаты Бора. Испускание и поглощение энергии атомом. Непрерывный и линейчатый спектры. Спектральный анализ.

Экспериментальные методы регистрации заряженных частиц: камера Вильсона, счетчик Гейгера, пузырьковая камера, фотоэмульсионный метод.

Состав ядра атома. Изотопы. Энергия связи атомных ядер. Понятие о ядерных реакциях. Радиоактивность. Виды радиоактивных излучений и их свойства. Цепные ядерные реакции. Термоядерная реакция.

Биологическое действие радиоактивных излучений. Защита от радиации.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Физика: Механика. 10 кл.: Учебник для углубленного изучения физики /Под ред. Г.Я. Мякишева. – М.: Дрофа, 2001.
2. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика: Молекулярная физика. Термодинамика. 10 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
3. Мякишев Г.Я., Синяков А.З., Слободсков Б.А. Физика: Электродинамика. 10 – 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
4. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика: Колебания и волны. 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
5. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика: Оптика. Квантовая физика. 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
6. Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М. Задачи по элементарной физике. – М.: Физматлит, 2000 и последующие издания.
7. Бендриков Г.А., Буховцев Б.Б., Керженцев В.Г., Мякишев Г.Я. Физика. Для поступающих в вузы: Учебн. пособие. Для подготов. отделений вузов. – М.: Физматлит, 2000 и последующие издания.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Грачев А.В., Погожев В.А., Селиверстов А.В. Физика: 7 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2007.
2. Грачев А.В., Погожев В.А., Вишнякова Е.А. Физика: 8 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2008.
3. Грачев А.В., Погожев В.А., Боков П.Ю. Физика: 9 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2010.
4. Грачев А.В., Погожев В.А., Салецкий А.М., Боков П.Ю. Физика: 10 класс: Базовый уровень; профильный уровень: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2011.

5. Грачев А.В., Погожев В.А., Салецкий А.М., Боков П.Ю. Физика: 11 класс: Базовый уровень; профильный уровень: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2012.
6. Элементарный учебник физики /под ред. Г.С. Ландсберга. В 3-х кн. – М.: Физматлит, 2000 и последующие издания.
7. Яворский Б.М., Селезнев Ю.Д. Физика. Справочное пособие. Для поступающих в вузы. – М.: Физматлит, 2000 и последующие издания.
8. Физика. Учебники для 10 и 11 классов школ и классов с углубленным изучением физики /под ред. А.А. Пинского. – М.: Просвещение, 2000 и последующие издания.
9. Бутиков Е.И., Кондратьев А.С. Физика. В 3-х кн. М.: Физматлит, 2001.
10. Павленко Ю.Г. Физика. Полный курс для школьников и поступающих в вузы: Учебное пособие. – М.: Большая Медведица, 2002.
11. Сборник задач по физике /под ред. С.М. Козела – М.: Просвещение, 2000 и предшествующие издания.
12. Гольдфарб Н.И. Физика. Задачник. 9 – 11 кл.: Пособие для общеобразовательных учебных заведений. – М.: Дрофа, 2000 и предшествующие издания.
13. Задачи по физике /под ред. О.Я. Савченко – М.: Наука, 1988.
14. Задачи вступительных экзаменов и олимпиад по физике в МГУ – 1992–2011. – М.: Физический факультет МГУ, 2011 и предшествующие издания.
15. Отличник ЕГЭ. Физика. Решение сложных задач /под ред. В.А. Макарова, М.В. Семенова, А.А. Якуты; ФИПИ. – М.: Интеллект–Центр, 2010.
16. Драбович К.Н., Макаров В.А., Чесноков С.С. Физика. Подготовка к вступительным испытаниям в МГУ. – М.: Макс Пресс, 2009.
17. Драбович К.Н., Макаров В.А., Чесноков С.С. Физика. 770 задач с подробными решениями. – М.: Макс Пресс, 2009.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ – 2012»

В 2012 году МГУ совместно с газетой «Московский комсомолец» в восьмой раз подряд проводили олимпиаду «Покори Воробьевы горы», которая традиционно проходила в два тура: заочный и очный. Условия задач заочного тура были опубликованы в газете «Московский комсомолец» и на сайте МГУ. Победители заочного тура были приглашены на очные туры, которые проходили в шести городах России: Брянске, Екатеринбурге, Москве, Ростове на Дону, Томске и Уфе. Задания, предлагавшиеся участникам очных туров, содержали четыре теоретических вопроса, взятых из Программы вступительных испытаний по физике в МГУ, и четыре дополняющих их задачи. Ниже приведены задачи, предлагавшиеся на олимпиаде «Покори Воробьевы горы – 2012».

I. ЗАОЧНЫЙ ТУР

Задание для 7-х – 8-х классов

I.1. Качели. Ученики 7-го класса Петров и Васечкин раздобыли четыре одинаковых куска легкой и прочной веревки. Закрепив концы двух веревок на горизонтальной балке, они повисли, ухватившись за них. При этом веревка Петрова растянулась на $\Delta l_1 = 4,5$ см, а веревка Васечкина – на $\Delta l_2 = 3,5$ см. Тогда Петров и Васечкин взяли легкую доску, подвесили ее на всех четырех веревках – по две с каждой стороны, и уселись на доску таким образом, что она расположилась горизонтально. На сколько сантиметров растянулась при этом каждая из веревок?

I.2. Длина птичьего полета. Пираты вытащили сундук из пещеры на Острове сокровищ и, набив мешки драгоценностями, побежали с ними по тропе длиной $l = 1$ км, ведущей к берегу, со скоростью $v_1 = 4$ км/час. Добежав до берега, они повернули направо по тропе, ведущей вдоль береговой линии острова. В тот же момент из пещеры вышел Джон Сильвер и пошел за пиратами со



Рис. 1

скоростью $v_2 = 2$ км/час. В момент выхода Сильвера из пещеры с его плеча взлетел попугай и полетел искать пиратов со скоростью $u = 6$ км/час. Сильвер дошел до берега и повернул налево. Попугай увидел пиратов, и тут же полетел к Сильверу, от него – снова к пиратам и так далее до того момента, когда пираты, Сильвер и его попугай одновременно встретились. Какой путь проделал попугай за все время погони, в течении которой он сам, пираты и Сильвер двигались с постоянными по величине скоростями? Длина тропы, ведущей вокруг острова вдоль береговой линии (см. рис. 1) $L = 6$ км.

I.3. Девочки на шаре. Три сестры (Маша, Даша и Оля) занимаются в цирковом кружке и репетируют номер, где они попарно удерживают равновесие на сильно накачанном легком резиновом шаре. Как то они помыли шар и по его отпечаткам установили, что, когда на шаре стоят Маша и Даша, то площадь соприкосновения его с полом равна $S_1 \approx 900 \text{ см}^2$, когда Маша и Оля – $S_2 \approx 1050 \text{ см}^2$, а когда Даша и Оля – $S_3 \approx 1150 \text{ см}^2$. Известно, что масса Маши $m_M = 16$ кг. Найти массы Даши и Оли. Считать, что давление в шаре во всех случаях примерно одинаково.

I.4. Дедуктивный метод. Преступники захватили инспектора уголовного розыска майора Томина и, связав, бросили в запертой квартире. Инспектору удалось освободиться. Он выбрался на лестничную клетку и заметил, что находится в многоэтажном доме, лифт в котором сломан и ездит от первого до последнего этажа и обратно, не останавливаясь. Инспектор заметил, что промежуток времени между проходом лифта вверх и возвращением его сверху в $n_1 = 3$ раза больше, чем между проходом лифта вниз и возвращением снизу. Он осторожно поднялся на $k = 2$ этажа вверх и снова прислушался. Теперь соотношение времен оказалось равно $n_2 = 2$. Все ясно, подумал Томин. Определите и вы, на каком этаже находилась квартира преступников и сколько всего этажей в этом доме.

I.5. Промах злодея. Профессор Мориарти сбросил с воздушного шара, зависшего неподвижно на высоте $h = 200$ м, стальной шарик, целясь в Шерлока Холмса, но не попал. Шар упал на Землю со скоростью $v = 50$ м/с. Считая, что 80% количества теплоты, выделившейся при

трении шара о воздух, пошли на нагрев шара, найдите, на сколько градусов увеличилась его температура. Удельная теплоемкость стали $c = 500 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$.

I.6. Где теплее? В схеме, показанной на рис. 2, сопротивления резисторов удовлетворяют соотношениям: $R_1 = 5R$, $R_2 = R_3 = R_4 = R$, $R_5 = 10R$. Определите, во сколько раз мощность, выделяющаяся на резисторе R_3 , отличается от мощности, выделяющейся на резисторе R_1 .

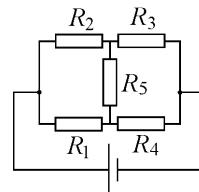


Рис. 2

Задание для 9-х – 11-х классов

I.7. Крутится, вертится. На тонкостенный обод велосипедного колеса массой m и радиуса R , ось которого горизонтальна и закреплена, прикреплён груз массой $2m$ малых размеров и намотана тонкая нерастяжимая нить. Один конец нити прикреплен к ободу, а к другому её концу привязана гири массой m . Обод удерживают так, что груз располагается на одной горизонтали с осью колеса. Пренебрегая трением, массой спиц, втулки и нити, определите модуль максимальной скорости груза после отпускания обода, считая, что гиря во время движения не касается обода.

I.8. Плавильная печь. Однажды некий экспериментатор поместил ледяной кубик массой $m = 7,2 \text{ г}$ на дно цилиндрической емкости, площадь основания которой $S = 6 \text{ см}^2$. Далее он стал нагревать кубик максимально равномерно по поверхности, добиваясь того, чтобы в процессе таяния кубик сохранял свою форму. Скорость поглощения кубиком тепла составляла $q = 0,5 \text{ кДж}/\text{с}$. Экспериментатор исследовал зависимость уровня воды в емкости от времени вплоть до момента, когда весь лед растаял. Воспроизведите полученный им график. Плотности воды и льда равны соответственно $\rho_0 = 1 \text{ г}/\text{см}^3$ и $\rho = 0,9 \text{ г}/\text{см}^3$, удельная теплота плавления льда $\lambda \approx 3,4 \cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$.

I.9. Солнечный круг. Рассказывают, будто бы Виллеброрду Снеллу удалось склеить из тонких слоев прозрачную пластину, в которой свет распространялся по дуге окружности. Пусть показатель

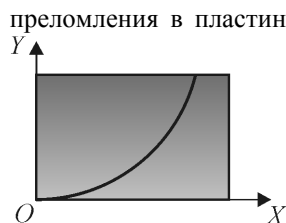


Рис. 3

преомления в пластине зависит от координаты y (рис. 3), узкий луч света попадает в пластину в направлении, практически совпадающим с направлением оси OX , и распространяется по дуге окружности радиуса R . Найдите закон изменения показателя преломления $n(y)$. Используя табличные данные о величине показателей преломления для естественных материалов, определите максимально возможный угловой размер «световой дуги».

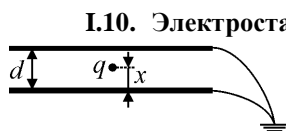


Рис. 4

I.10. Электростатическая индукция изнутри. Обе пластины плоского конденсатора, имеющие площадь S каждая и расположенные на малом расстоянии d друг от друга, заземлены. Какой заряд окажется на каждой из пластин, если внутри конденсатора на расстоянии $0 < x < d$ от одной из пластин расположить точечный заряд q (рис. 4)?

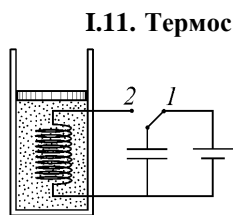


Рис. 5

I.11. Термос с подогревом. Один любознательный школьник собрал калориметр с подвижным поршнем, заполненный гелием и снабженный системой электроподогрева. Внутри калориметра он поместил спираль сопротивлением $R = 200$ Ом с выведенными наружу контактами. Затем он собрал схему, изображенную на рис. 5. Вся система размещена под колоколом, из-под которого откачан воздух. На какую максимальную высоту (над начальным положением) поднимется поршень после перевода ключа из положения 1 в положение 2? Емкость конденсатора $C = 0,5$ мкФ, ЭДС батареи $\mathcal{E} = 100$ В, сопротивление соединительных проводов пренебрежимо мало. Масса поршня $m = 400$ г, трением между поршнем и стенками калориметра и теплопроводностью стенок и поршня можно пренебречь. Площадь поршня $S = 10$ см², начальная высота положения поршня над дном калориметра $H = 5$ см. Индуктивность спирали пренебрежимо мала. Поршень при движении остается внутри калориметра.

И.12. Наши сани едут сами. Некий талантливый молодой изобретатель создал самодвижущиеся сани. Водитель саней располагается в их носовой части, и резким броском отправляет ядро массой $m = 20$ кг по гладкому желобу в сторону

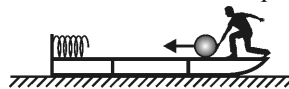


Рис. 6

кормы. В кормовой части установлена невесомая пружина жесткостью $k = 80$ Н/м, отражающая ядро в сторону носа (рис. 6). Водитель ловит ядро, и цикл повторяется. Масса саней вместе с водителем равна $M = 180$ кг, коэффициент трения саней о горизонтальную поверхность дороги $\mu = 0,1$. Водитель при броске сообщает ядру скорость $u = 5$ м/с относительно себя. В качестве горючего для саней изобретатель предложил использовать шоколад с калорийностью $q = 5500$ ккал/кг. Считая, что организм водителя может использовать для производства механической работы 50% поступающей с пищей энергии, и пренебрегая всеми прочими возможными потерями, найдите минимальный расход шоколада на $s = 1$ км пути саней. Какой должна быть длина саней для обеспечения минимальности расхода шоколада?

II. ОЧНЫЙ ТУР

Задание для 7-х – 9-х классов

II.1. Идущий по движущемуся вниз эскалатору человек опускается от верхней до нижней точки за время $t_1 = 3$ мин, а стоящий на этом эскалаторе – за время $t_2 = 5$ мин. Сколько времени потребуется человеку, чтобы подняться по неподвижному эскалатору, если он будет идти по нему в $n = 2$ раза медленнее, чем он шёл по движущемуся эскалатору?

II.2. При соблюдении некоторых предосторожностей можно получить при нормальном атмосферном давлении воду, имеющую температуру $t = -10$ °С. Определите массу m льда, который может образоваться из $M = 0,5$ кг такой переохлаждённой воды, находящейся в калориметре, если в него бросить маленький кусочек льда. Теплоёмкость калориметра считайте равной $c_k = 50$ Дж/°С, удельную теплоёмкость воды $c = 4,2$ Дж/(г·°С), а удельную теплоту плавления льда $\lambda = 332$ Дж/г.

II.3. На тонкой капроновой нити длиной L и жёсткостью k к потолку подвесили маленький шарик массой m , имеющий заряд q . Затем в области нахождения шарика создали горизонтальное электрическое поле, напряжённость которого очень медленно увеличивали до тех пор, пока удлинение нити не стало равным $\Delta L \ll l$. Определите разность потенциалов $\Delta\phi$ между начальной и конечной точками перемещения шарика, обусловленного созданием электрического поля. Ускорение свободного падения g .

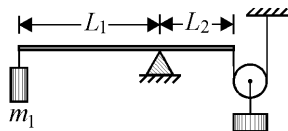


Рис. 7

II.4. Два груза уравновешены с помощью системы, состоящей из невесомых рычага и подвижного блока (см. рис. 7). Длины плеч рычага $L_1 = 1$ м и $L_2 = 50$ см. Масса первого груза $m_1 = 1$ кг. Найдите массу второго груза.

II.5. Два шара равного объема изготовлены из разных материалов. Более тяжелый шар, помещенный на дно пустого сосуда, давит на него с силой P . После того, как в сосуд налили воду, сила давления шара на дно уменьшилась вдвое. Когда в сосуд поместили легкий шар, он стал плавать на поверхности воды так, что над водой выступала в точности половина его объема. Наконец, шары связали тонкой легкой нитью такой длины, что легкий шар оказался полностью погруженным в воду. С какой силой теперь давит тяжелый шар на дно сосуда?

Задание для 10-х – 11-х классов

II.6. Осколочный снаряд летит со скоростью u по направлению к плоской стенке перпендикулярно к ней. На расстоянии l от стенки снаряд взрывается и распадается на множество осколков, летящих во все стороны и имеющих скорость v относительно центра масс снаряда. Какая область на поверхности стенки будет поражена осколками? Найдите площадь этой области. Действие силы тяжести и сопротивление воздуха не учитывайте.

II.7. На горизонтальном столе лежат длинная линейка AB и прямоугольный ластик C (на рис. 8 изображен вид сверху). Ластик касается линейки одной из своих боковых граней. Линейку переместили на расстояние $S = 20$ см, двигая ее равномерно и поступательно, так что

ластик двигался перед линейкой, не отрываясь от нее. Угол между линейкой и направлением ее перемещения составляет $\alpha = 45^\circ$. Найдите величину перемещения ластика относительно стола за это же время. Коэффициент трения ластика о линейку равен $\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

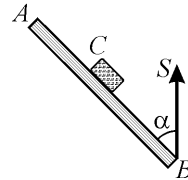


Рис. 8

П.8. Брусок массой m равномерно втаскивают за нить вверх по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения равен μ . Найти угол β , который должна составлять нить с наклонной плоскостью, чтобы натяжение нити было наименьшим. Чему равно наименьшее натяжение нити?

П.9. Мячик брошен под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Какой угол с горизонтом будет составлять вектор скорости мяча в тот момент, когда его кинетическая энергия станет равной потенциальной энергии, если значение потенциальной энергии в точке бросания мяча принято равным нулю? Каковы в этот момент модули тангенциальной и нормальной составляющих ускорения мячика? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

П.10. Маленький тяжелый шар подвешен неподвижно на легкой нерастяжимой нити длиной $l = 50$ см. Ему сообщают некоторую скорость v_0 , направленную горизонтально, в результате чего он стал двигаться по окружности на натянутой нити. Сила натяжения нити обратилась в ноль в тот момент, когда кинетическая энергия шара стала равной четверти его потенциальной энергии, отсчитываемой от начального положения. Найдите величину v_0 . Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с². Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

П.11. Какую силу P нужно приложить к равнобедренному прямоугольному уголку массой m , изготовленному из тонкой однородной полосы металла, чтобы удержать его в равновесии между двумя призматическими опорами так, как показано на рис. 9? Коэффициент трения между уголком и опорами $\mu = 1$.

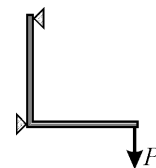


Рис. 9

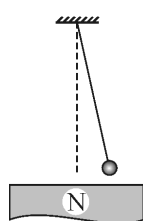


Рис. 10

П.12. Математический маятник, представляющий собой небольшой железный шарик массой m , подвешенный на длинной невесомой нити, имеет период малых колебания T_0 . Когда к шарiku поднесли торец полосового магнита, расположив его горизонтально чуть ниже шарика (рис. 10), период малых колебаний шарика стал равным T . Определите величину действующей на шарик магнитной силы, считая ее постоянной во всей области движения шарика.

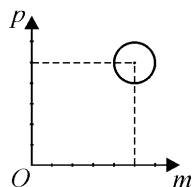


Рис. 11

П.13. Диаграмма процесса (рис. 11), проводимого над идеальным газом в сосуде постоянного объема, построенная в координатах масса газа – давление, при некотором выборе масштабов по осям координат оказалась окружностью единичного радиуса с центром в точке (5,5). Найдите отношение минимальной и максимальной температур газа в этом процессе.

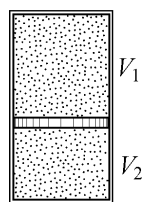


Рис. 12

П.14. Поршень, который находится в вертикальном закрытом цилиндре, может перемещаться без трения. По обе стороны от поршня находятся одинаковые количества одного и того же идеального газа (рис. 12). При температуре T_1 объем верхней части в $k = \frac{V_1}{V_2}$ раз больше нижней части. Каким будет отношение объемов $\frac{V'_1}{V'_2} = k'$, если температуру

газа повысить до значения T_2 ?

П.15. Сначала давление одного моля одноатомного идеального газа изохорно изменили от начального до некоторого промежуточного значения. Затем изобарно уменьшили объем газа в $n = 4$ раза. После этого газ изохорно перевели в конечное состояние. Зная, что температура газа в конечном состоянии в $k = 1,25$ раза превышает его температуру в начальном состоянии, и что полное количество теплоты, которым обменялся газ с внешними телами, равно нулю, найдите отношение максимального давления газа к минимальному давлению в этом процессе.

П.16. Некоторое количество идеального газа занимает объем V_1 при давлении p_1 и температуре T_1 . Газ при постоянном объеме нагревают до температуры $T_2 = 2T_1$. После этого происходит расширение газа при постоянном давлении до объема $V_2 = 4V_1$. Из этого состояния газ возвращают в начальное состояние в ходе процесса, уравнение которого имеет вид $pV^n = \text{const}$. Найдите показатель степени n .

П.17. В закрытом сосуде объемом $V = 1$ л находится влажный воздух при температуре 100°C . Относительная влажность воздуха $\varphi = 25\%$. Какая масса водяного пара сконденсируется при изотермическом уменьшении объема в $n = 5$ раз? Нормальное атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, молярная масса воды $\mu = 18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль·К).

П.18. Плотность влажного воздуха при температуре $t = 50^\circ\text{C}$ и давлении $p = 99,52$ кПа равна $\rho \approx 1,05$ кг/м³. Давление насыщенных паров воды при этой температуре $p_{\text{нас}} \approx 12,3$ кПа. Найдите относительную влажность воздуха. Молярную массу сухого воздуха считайте равной $\mu_1 \approx 29$ г/моль. Молярная масса воды $\mu_2 = 18$ г/моль.

П.19. Моль неона, занимающий объем $V_1 = 5$ л, изобарно нагревают так, что его объем увеличивается до $V_2 = 10$ л, а затем изохорно увеличивают его давление до $p_2 = 0,1$ МПа. Определите изменение температуры газа в этом процессе, если работа, совершенная газом, $A = 0,4$ кДж. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль·К).

П.20. Три одинаковые тонкие палочки, на которые равномерно нанесен одинаковый положительный заряд, расположены таким образом, что они образуют три стороны квадрата. При этом создаваемая ими напряженность электрического поля в центре квадрата равна \vec{E} . Как изменится направление и величина напряженности поля в этой точке, если убрать одну из крайних палочек?

П.21. Три небольших одинаковых металлических шарика расположили правильным треугольником. Шарика поочередно по одному

разу соединяют с удаленным проводником, потенциал которого поддерживается постоянным. В результате на первом шарике оказывается заряд, равный Q_1 , а на втором – заряд, равный Q_2 . Определите заряд, который окажется на третьем шарике.

П.22. Два одинаковых плоских конденсатора емкостью $C = 40$ мкФ каждый заряжены до разности потенциалов $U_1 = 60$ В и $U_2 = 260$ В. Одноименно заряженные пластины конденсаторов соединили проводниками. Какое количество теплоты при этом выделилось?

П.23. Имеются два одинаковых плоских конденсатора емкостью $C = 20$ мкФ каждый. Один из них заряжен до разности потенциалов $U_1 = 80$ В, а второй до некоторой разности потенциалов U_2 . Разноименно заряженные пластины конденсаторов соединили проводниками, при этом выделилось количество теплоты $Q = 0,2$ Дж. Определите, до какой разности потенциалов U_2 был заряжен другой конденсатор.

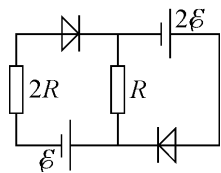


Рис. 13

П.24. Найдите ток через резистор $R = 10$ Ом в цепи, схема которой изображена на рис. 13. Диоды являются идеальными, внутренние сопротивления источников одинаковы и равны $r = 2R$, ЭДС батареи в левой ветви $\mathcal{E} = 12$ В, остальные параметры элементов схемы показаны на рисунке.

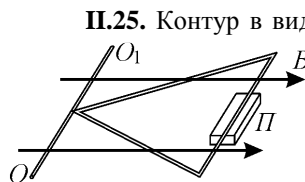


Рис. 14

П.25. Контур в виде равностороннего треугольника со стороной l и массой m может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси OO_1 , проходящей через одну из его вершин параллельно противоположной стороне. В области пространства, в которой находится контур, создано однородное магнитное поле, линии индукции которого горизонтальны. Вначале контур располагался горизонтально (рис. 14), опираясь дальней от оси стороной на подставку $П$. Затем по контуру начали пропускать электрический ток, сила которого плавно увеличивалась. При какой величине силы тока контур оторвется от подставки?

П.26. Плоский горизонтально расположенный контур содержит источник тока с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r , перемычку длиной l и сопротивлением R , и две параллельные направляющие AA' и CC' , сопротивлением которых можно пренебречь (рис. 15). Контур помещен в однородное вертикальное магнитное поле с индукцией B . Какой будет сила тока в контуре в тот момент, когда перемычка достигнет максимальной скорости? Коэффициент трения между перемычкой и направляющими μ , а масса перемычки m .

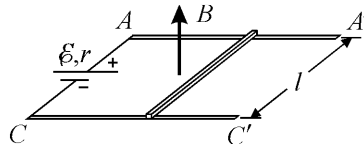


Рис. 15

П.27. Два плоских зеркала образуют двугранный угол $\alpha = 135^\circ$. Точечный источник света расположен на перпендикуляре к одному из зеркал, восстановленном в точке, принадлежащей ребру двугранного угла на расстоянии $h = 20$ см от этого ребра (рис. 16). Найдите расстояние между изображениями источника.

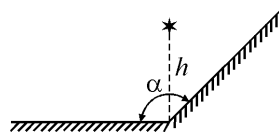


Рис. 16

П.28. Призма сделана из стекла с показателем преломления $n = 1,5$. Преломляющий угол при вершине призмы $\varphi = 45^\circ$. Тонкий луч света падает на одну из боковых граней (рис. 17). При каких значениях угла α падения луча преломленный луч, попав на вторую боковую грань, не выйдет из нее?

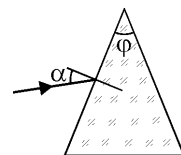


Рис. 17

П.29. Луч света падает на боковую поверхность прозрачной призмы параллельно её основанию и одной из граней (рис. 18). Сечением призмы является равносторонний треугольник. При каком минимальном значении показателя преломления n вещества, из которого изготовлена призма, падающий луч, достигнув противоположной боковой грани призмы, не выйдет из неё?

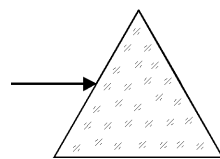


Рис. 18

П.30. Предмет и его прямое изображение расположены симметрично относительно фокуса тонкой рассеивающей линзы. Расстояние от предмета до фокуса линзы $l = 4$ см. Найдите фокусное расстояние линзы.

П.31. Квадрат со стороной $a = 0,5$ см расположен перед тонкой линзой с фокусным расстоянием $F = 10$ см так, что одна пара его сторон перпендикулярна главной оптической оси линзы, причем эта ось проходит через центр квадрата. Расстояние от ближайшей стороны квадрата до линзы равно $b = 30$ см. Найдите площадь изображения квадрата.

П.32. По одну сторону от линзы радиуса $R_n = 5$ см с оптической силой $D = 4$ Дптр параллельно ее плоскости установили экран. Расстояние от экрана до линзы на $a = 5$ см больше фокусного расстояния линзы. По другую сторону от линзы на ее главной оптической оси на расстоянии $d = 50$ см от центра линзы расположен точечный источник света. Определите радиус светлого пятна на экране, образованного лучами, прошедшими через линзу.

П.33. Точечный источник света расположен на двойном фокусном расстоянии от тонкой собирающей линзы на ее оси. За линзой перпендикулярно оптической оси помещено плоское зеркало. На каком расстоянии от линзы нужно поместить зеркало, чтобы лучи, отраженные от зеркала, пройдя вторично через линзу, стали параллельными?

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ – 2011/2012»

В 2011/2012 учебном году олимпиада «Ломоносов» по физике в МГУ проводилась в два этапа – отборочный и заключительный. Отборочный этап проходил в форме заочного испытания. Задания олимпиады были размещены в Интернете на сайте <http://www.lomonosov.msu.ru>. Доступ к условиям заданий был открыт для участников 1 ноября 2011 года, прием решений и ответов был завершен 24 января 2012 года. Победители и призеры отборочного этапа были допущены к участию в заключительном этапе, который проходил на физическом факультете МГУ 23 марта 2012 года в форме очного письменного испытания. Победители и призеры заключительного этапа олимпиады «Ломоносов» пользовались определенными льготами при поступлении в МГУ и другие вузы.

I. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Задание отборочного этапа олимпиады «Ломоносов» по физике состояло из 13 задач различного уровня сложности. Для решения первых четырех задач достаточно было знаний в рамках программы по физике для 7-х – 8-х классов общеобразовательных учреждений. Задачи с пятой по седьмую были составлены в расчете на учащихся 9-х классов общеобразовательных учреждений.

Наконец, последние 6 задач (с восьмой по тринадцатую) были предназначены для учащихся 10-х – 11-х классов общеобразовательных учреждений базового и профильного уровней.

Участники должны были обратить внимание на выполнение следующих требований к оформлению решений задач.

1. Все физические законы, используемые при решении задач, должны быть названы и сформулированы, а их применимость в каждом конкретном случае обоснована.
2. На основании физических законов, а также дополнительных соотношений, следующих из условия задачи, должна быть записана система уравнений.
3. Должно быть получено решение этой системы уравнений сначала в общем виде, а затем, после подстановки числовых данных (если они заданы в условии задачи), также ответ в виде числа с указанием единиц измерения.
4. Ответ в общем и числовом виде должен быть выписан в конце решения задачи на отдельной строке.

Ниже приведены задачи, предлагавшиеся участникам отборочного этапа олимпиады «Ломоносов – 2011/2012»

I.1. Султан обещал Алладину заплатить 100 золотых монет за ковер-самолет. Алладин доставил Султану диковинку и получил от него в качестве оплаты керамический кувшин с золотыми монетами общей массой, равной массе ста монет. Заподозрив обман, Алладин тем не менее не осмелился публично усомниться в честности Султана. Вместо этого он попросил у Султана глубокое блюдо, чан до краев наполненный водой, и одну золотую монету. Поставив чан на блюдо, Алладин опустил в него монету и попросил у Султана стаканчик, объем которого равен объему вылившейся в блюдо воды. Потом Алладин погрузил в чан кувшин с монетами. Обнаружив, что при этом на блюдо вылилось 273 стаканчика воды, Алладин сообщил Султану, сколько монет не хватает в кувшине до обещанного вознаграждения. Пораженный Султан приказал выдать Алладину в награду второй такой же кувшин с монетами. Сколько монет в итоге досталось сообразительному Алладину?

Для справки. Плотность золота $19,3 \text{ г/см}^3$, плотность керамики 2 г/см^3 .

I.2. По прямой дороге равномерно двигался автомобиль. В момент времени, когда автомобиль проезжал мимо пункта C , его скорость была равна $u_0 = 30 \text{ км/ч}$. В этот же момент из пункта C выехал

мотоциклист, который двигался с постоянным ускорением в ту же сторону, что и автомобиль. К тому моменту, когда скорости автомобиля и мотоцикла сравнялись, расстояние от автомобиля до пункта C превышало расстояние от мотоцикла от пункта C на $s = 100$ м. Автомобиль остановился на расстоянии $3s$ от пункта C . Какова была скорость мотоцикла v_0 в момент остановки автомобиля? Какое расстояние S проехал мотоцикл к моменту остановки автомобиля?

1.3. В основу системы отсчета времени на Земле сейчас положено так называемое всемирное координированное время (UTC), которое является современной версией среднего времени по Гринвичу, то есть среднего солнечного времени на Гринвичском меридиане. Поверхность Земли условно поделена на 24 часовых пояса. Местное время в часовом поясе, через который проходит Гринвичский меридиан, совпадает с UTC; этот часовой пояс обозначается UTC+0. При переходе из одного часового пояса в другой значения минут и секунд сохраняются, скачком изменяется лишь значение часов. Часовые пояса вокруг земного шара имеют как положительное (к востоку), так и отрицательное (к западу) смещение от UTC.

Проведем мысленно следующую игру. Подберем 194 176 участников и расположим их на линии экватора на одинаковом расстоянии друг от друга. Первого участника поместим в некоторой точке A в самом восточном часовом поясе (UTC+12) – именно здесь раньше всего на Земле наступает новый календарный день. Для последнего участника отведем место в точке B , лежащей в самом западном часовом поясе (UTC–12). Пусть при этом кратчайшее расстояние от точки A до точки B по линии экватора составляет 2 015 238,24 м. Ровно в 00 часов 00 минут 00 секунд 1 января 2012 года первый участник стреляет из хлопушки и тем самым передает сигнал о наступлении Нового года следующему участнику. Так, по цепочке, сигнал передается с востока на запад по линии экватора из точки A в точку B . При этом каждый участник, хоть и готов к приему сигнала, но, замешкавшись, запаздывает при подаче очередного сигнала на 0,5 с.

Определите, на сколько минут при таком способе оповещения о начале праздника последний участник игры запоздает с празднованием Нового года.

Для справки. Длина экватора 40 075,676 км. Скорость распространения звука в воздухе при температуре 30°C равна 1 245,24 км/ч.

I.4. Выполняя лабораторную работу, ученик 8-го класса соединил последовательно два выданных ему резистора и погрузил их в масло, налитое в калориметр. Затем он подключил к резисторам источник, установив на его выходе напряжение U . Через время $\Delta t_1 = 4,5$ мин. он обнаружил, что температура масла увеличилась на ΔT градусов. После этого он извлёк из калориметра резисторы, соединил их параллельно и, остудив резисторы до комнатной температуры, погрузил их в масло во втором калориметре, точно таком же, как первый. Зная, что калориметры содержали одинаковое количество одного и того же масла, имевшего до нагревания комнатную температуру, и температура масла во втором калориметре после создания на концах резисторов напряжения U увеличилась на ΔT градусов через время $\Delta t_2 = 1$ мин., определите, во сколько раз k отличаются сопротивления резисторов.

I.5. Передний бампер полноприводного легкового автомобиля движущегося со скоростью $v = 60$ км/ч по прямолинейному участку горизонтального шоссе, в некоторый момент времени t_1 поравнялся с задним бампером прицепа грузовика, движущегося со скоростью $u = 40$ км/ч в том же направлении по параллельной полосе. Длина легкового автомобиля $l = 5$ м, а грузовика с прицепом $L = 20$ м. Определите минимальное время, за которое легковой автомобиль сможет обогнать грузовик с прицепом, если он с момента t_1 начнёт двигаться с максимально возможным постоянным ускорением. Коэффициент трения колёс автомобиля о дорогу $\mu = 0,8$. Ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с².

I.6. На горизонтальном столе лежат два одинаковых кубика, связанных пружиной (рис19). Масса каждого кубика $M = 200$ г. Правый кубик соединен с легкой чашей нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Коэффициент трения между кубиками и столом $\mu = 0,1$. В исходном состоянии пружина не деформирована. Грузик какой минимальной массы m нужно осторожно (без толчка) положить на чашу, чтобы левый кубик сдвинулся с места? Нить, пружину и блок считайте невесомыми.

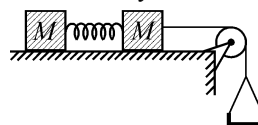


Рис. 19

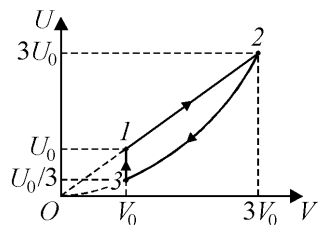


Рис. 20

I.7. Некоторое количество идеального одноатомного газа участвует в циклическом процессе. При этом внутренняя энергия газа U меняется так, как показано на рис. 20. Участок $2-3$ – часть параболы. Определите работу газа за один цикл процесса. Исходное значение внутренней энергии газа равно $U_0 = 90$ кДж.

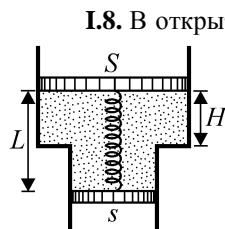


Рис. 21

I.8. В открытой с обоих концов гладкой трубе переменного сечения, расположенной вертикально, находятся два тяжёлых поршня, соединённые пружиной жёсткостью k (рис. 21). Между поршнями находится гелий. Площадь поперечного сечения верхнего поршня равна S , а малого – s . Абсолютная температура окружающего воздуха и гелия равна T_0 . Длина растянутой пружины равна L , а верхний поршень находится на высоте H над ступенькой в трубе. Определите изменение температуры гелия, при котором верхний поршень опустится на расстояние $h < H$ при неизменном атмосферном давлении.

I.9. Маленькое тело бросили под некоторым углом к горизонту и одновременно включили секундомер и датчик расстояния, расположенный в точке бросания. Измерения показали, что вначале расстояние от датчика до тела увеличивалось, затем, в промежутке времени от t_1 до t_2 уменьшалось, а потом вновь увеличивалось. С какой начальной скоростью v_0 было брошено тело? До какой максимальной высоты H оно поднялось? Сколько времени τ длился полет тела, если точка его падения находилась на одном уровне с точкой бросания? При каких углах α_0 бросания тела возможна ситуация, описанная в условии? Ускорение свободного падения равно g . Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.

I.10. Самолет совершает ночную посадку в условиях сильного снегопада. На крыльях самолета регулярно вспыхивают проблесковые бортовые огни, дающие две очень короткие вспышки в течение половины секунды с последующей паузой в одну секунду. Пассажир, сидящий у иллюминатора, отчетливо видит, как вспышки света выхватывают из

темноты отдельные снежинки около крыла. После посадки пассажир узнал, что во время захода на посадку самолет летел со скоростью 330 км/ч, было безветренно, а интенсивность снегопада была такова, что за час выпал 1 мм осадков. (Это означает, что, если растопить выпавший за час снег, то получится слой воды толщиной 1 мм). Из энциклопедии пассажир выяснил, что снежинки имеют в среднем массу 5 мг и падают вниз со скоростью около 1 км/ч. После этого он без труда оценил длительность отдельной вспышки проблескового огня. Какой результат получил пассажир? Как изменилась бы его оценка, если интенсивность снегопада была бы в 10 раз меньше?

I.11. В тепловом двигателе, рабочим телом которого является идеальный одноатомный газ, проводится циклический процесс, состоящий из трех участков. На каждом из этих участков теплоемкость газа постоянна, а график зависимости давления газа от объема представляет собой отрезок прямой линии. Известно, что на участке, на котором теплоемкость газа максимальна, объем газа уменьшается в k раз. Каков коэффициент полезного действия η этого двигателя?

I.12. В плоском конденсаторе расстояние между пластинами равно d , разность потенциалов между обкладками равна U . Конденсатор находится в однородном магнитном поле с индукцией B , причем вектор \vec{B} параллелен пластинам (рис. 22). На отрицательно заряженную пластину падает квант света с энергией, незначительно превышающей работу выхода. После этого выбитый из пластины фотоэлектрон начинает движение по траектории, в точности совпадающей с траекторией точки на ободе воображаемого колеса, катящегося по отрицательно заряженной пластине без проскальзывания. Чему равны радиус R этого колеса и скорость V его центра? Силу тяжести можно не учитывать, электрическое поле в конденсаторе считайте однородным. Удельный заряд электрона равен γ .

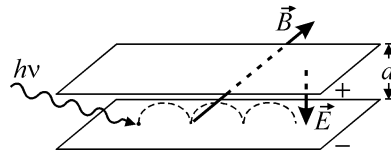


Рис. 22

I.13. На плоскую поверхность тонкой линзы, находящейся в воздухе, падает узкий пучок света, параллельный её главной оптической оси. На экране, расположенном за линзой, наблюдается светлое пятно,

диаметр которого в k раз меньше диаметра падающего пучка, причем $k > 1$. Найдите показатель преломления n стекла линзы, если после погружения линзы с экраном (при неизменном расстоянии между ними) в жидкость с показателем преломления n_1 диаметр светлого пятна на экране не изменяется.

II. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Задания заключительного этапа олимпиады предназначались для учащихся 10-х – 11-х классов и были составлены в полном соответствии с Программой по физике для поступающих в МГУ им. М.В. Ломоносова. Задание для каждого участника охватывало основные разделы Программы: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику.

Типовое задание состояло из пяти различных разделов, состоящих из кратких вопросов по теории и дополняющих их задач. В первом и втором разделах помещены задания по механике, в третьем разделе – задание по молекулярной физике и термодинамике, в четвертом разделе – задание по электродинамике, в пятом разделе – задание по оптике

Ниже приводятся примеры заданий заключительного этапа олимпиады «Ломоносов – 2011/2012»

II.1. Что такое масса тела? Дайте определение плотности вещества.

Задача. Изделие, изготовленное из сплава золота и меди, имеет массу $m = 1,6$ кг и плотность $\rho = 16,8 \cdot 10^3$ кг/м³. Считая, что объем сплава равен суммарному объему исходных компонент, определите массу m_1 золота в этом изделии. Плотность золота $\rho_1 = 19,3 \cdot 10^3$ кг/м³, плотность меди $\rho_2 = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³.

II.2. Дайте определение центра тяжести тела. Запишите формулу для потенциальной энергии взаимодействия тела с Землей вблизи её поверхности.

Задача. Кубик, стоявший на шероховатой горизонтальной плоскости, переворачивают через его ребро так, что это ребро остаётся неподвижным. Затем этот же кубик перемещают поступательно по горизонтальной плоскости на расстояние, равное длине его ребра. Коэффициент

трения кубика о плоскость равен μ . Определите отношение минимальных положительных работ сил, вызвавших перемещение кубика в первом и во втором случаях.

П.3. Дайте определение внутренней энергии термодинамической системы. Какими способами можно изменить внутреннюю энергию?

Задача. Найдите изменение ΔE средней кинетической энергии молекулы идеального одноатомного газа, если при изобарном нагревании $\nu = 5$ молей этого газа им совершена работа $A = 300$ Дж. Постоянная Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹.

П.4. Сформулируйте условия существования постоянного тока в цепи. Дайте определение электродвижущей силы (ЭДС).

Задача. Ученик соединил $N = 8$ одинаковых источников тока таким образом, что после подключения полученной батареи к резистору с сопротивлением $R = 0,4$ Ом сила тока в резисторе достигла максимально возможного значения I_{\max} . Чему равно I_{\max} , если ЭДС и внутреннее сопротивление одного источника равны соответственно $\mathcal{E} = 2$ В и $r = 0,2$ Ом?

П.5. Дайте определения фокусного расстояния и оптической силы тонкой линзы.

Задача. Расстояние между предметом и его прямым изображением, полученным с помощью тонкой линзы, равно $L = 40$ см. Изображение меньше предмета в $n = 3$ раза. Какова оптическая сила линзы?

ИНТЕРНЕТ–ОЛИМПИАДА «ШАГ В ФИЗИКУ – 2011»

В декабре 2011 года физический факультет МГУ в четвертый раз проводил дистанционную олимпиаду по физике для школьников «Шаг в физику».

Для участия в олимпиаде школьнику достаточно было иметь в своем распоряжении компьютер, подключенный к сети Интернет и адрес электронной почты. Каждый участник должен был самостоятельно пройти регистрацию на олимпиаду «Шаг в физику» с обязательным заполнением всех форм на сайте Центра дистанционного образования, по адресу: <http://distant.pro>.

Олимпиада проходила дистанционно по адресу <http://distant.pro>. С 10 по 11 декабря 2011 года участникам был предоставлен доступ к заданиям олимпиады. Задания олимпиады предназначались для учащихся 7-х, 8-х, 9-х, 10-х и 11-х классов средних школ и средних профессиональных учебных заведений.

В 0 часов 00 минут по московскому времени в субботу 10 декабря 2011 года все зарегистрированные участники получили доступ к заданиям олимпиады, которые необходимо было выполнить до 17 часов 00 минут по московскому времени 11 декабря 2011 года. Для представления решений допускались различные формы: текстовый файл, документ MSWord, а также отсканированные или сфотографированные с высоким разрешением рукописные страницы.

Олимпиада вызвала большой интерес у школьников. В ней приняли участие свыше 2600 учащихся из 67 субъектов Российской Федерации, а также из Украины, Беларуси, Грузии и Таджикистана.

Победители и призеры 7, 8, 9 и 10 классов были рекомендованы для участия в очном туре Московской олимпиады школьников по физике, которая проходила 12 и 26 февраля 2012 года.

Ниже приводятся условия заданий дистанционной олимпиады «Шаг в физику – 2011».

Задание для 7-го класса

7.1. Колонна солдат движется со скоростью, модуль которой равен 6 км/ч , растянувшись на 2 км . Из головы колонны в хвост с пакетом был направлен конный связной, который, отдав пакет, тут же вернулся обратно. Определите, через какое минимальное время связной мог вернуться в голову колонны, если модуль его скорости равен 14 км/ч . Ответ приведите в минутах.

7.2. За первые 30 мин всадник проехал расстояние 5 км . Следующий час он передвигался со скоростью, модуль которой равен 10 км/ч , а оставшиеся 6 км пути — со скоростью, модуль которой равен 12 км/ч . Определите среднюю скорость движения всадника на всем пути. Ответ приведите в километрах в час.

7.3. Пустую бутылку взвесили на электронных весах и обнаружили, что её масса равна 460 г. Наполнив бутылку до краев водой (плотность воды равна 1 г/см^3), её снова взвесили. Масса бутылки с водой оказалась равной 960 г. Масса той же бутылки, полностью заполненной подсолнечным маслом, равна 920 г. Определите плотность подсолнечного масла. Ответ приведите в килограммах на кубический метр.

7.4. Высота стальной Эйфелевой башни в Париже равна 300 м, а её масса 7200 т. Определите, какую массу будет иметь уменьшенная копия этой башни высотой 30 см, сделанная из вещества, плотность которого в 2,4 раза меньше плотности стали. Ответ приведите в граммах.

7.5. В стакане с водой (плотность воды 1 г/см^3) плавает, не касаясь стенок и дна стакана, кусок льда (плотность льда $0,9 \text{ г/см}^3$). Определите, как изменится уровень воды в стакане к тому моменту, когда весь лёд растает. Ответ нужно обосновать.

Задание для 8-го класса

8.1. Куб, длина ребра которого равна 1 м, плавает в воде, погружившись в неё на несколько сантиметров. При этом верхняя грань куба горизонтальна. После того, как на куб положили камень объёмом 10 дм^3 , глубина погружения куба увеличилась на 2 см, а верхняя грань осталась горизонтальной. Определите плотность камня. Плотность воды равна 1 г/см^3 . Ответ приведите в граммах на кубический сантиметр.

8.2. Если тело положить на правую чашку рычажных весов, то для их уравнивания на левую чашку необходимо положить гири весом 25 Н. Если же это тело положить на левую чашку, то для уравнивания весов потребуются гири весом 36 Н. Определите массу тела, считая модуль ускорения свободного падения равным 10 м/с^2 . Массой коромысла и чашек весов можно пренебречь. Ответ приведите в килограммах.

8.3. В Ш-образный сосуд (см. рис. 23), вертикальные трубки которого имеют одинаковое поперечное сечение, налита ртуть. Определите, на какую величину поднимется уровень ртути в средней трубке, если в левую трубку налить слой воды высотой 90 мм, а в правую – высотой 114 мм. Плотность воды 1 г/см^3 , плотность ртути $13,6 \text{ г/см}^3$. Ответ приведите в миллиметрах.



Рис. 23

8.4. В калориметр, содержащий воду при $50\text{ }^\circ\text{C}$, опустили 40 г льда при температуре $-10\text{ }^\circ\text{C}$. После установления термодинамического равновесия в калориметре осталось 19 г льда. Пренебрегая теплообменом содержимого калориметра с окружающими телами, определите первоначальную массу воды в калориметре. Удельная теплоёмкость воды равна $4,2\text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$, удельная теплоёмкость льда равна $2,1\text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$, удельная теплота плавления льда равна $330\text{ кДж}/\text{кг}$. Ответ приведите в граммах.

8.5. Смесь, состоящую из 5 кг льда и $11,5\text{ кг}$ воды, находящуюся в калориметре в состоянии термодинамического равновесия при нормальном атмосферном давлении, нагревают до температуры $80\text{ }^\circ\text{C}$, впуская в калориметр водяной пар, имеющий температуру $100\text{ }^\circ\text{C}$. При этом образующаяся в процессе конденсации пара вода остается в калориметре. Пренебрегая теплообменом содержимого калориметра с окружающими телами, определите массу пара, необходимую для такого нагревания. Удельная теплоёмкость воды равна $4,2\text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$, удельная теплота парообразования воды равна $2,3\text{ МДж}/\text{кг}$, удельная теплота плавления льда равна $330\text{ кДж}/\text{кг}$. Ответ приведите в килограммах, округлив до целых.

Задание для 9-го класса

9.1. Автомобиль, движущийся по прямой дороге с постоянным ускорением, проезжает два последовательных отрезка пути длиной $l_1 = 10\text{ м}$ и $l_2 = 50\text{ м}$ за промежутки времени $t_1 = 1\text{ с}$ и $t_2 = 4\text{ с}$ соответственно. Чему равно ускорение a автомобиля?

9.2. Небольшой шарик массой $m = 20\text{ г}$ падает из состояния покоя на гладкую наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол $\alpha = 60^\circ$. При ударе шарика о плоскость изменение импульса шарика составило $\Delta p = 0,08\text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}$. Считая удар абсолютно упругим, найдите высоту h , с которой упал шарик. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10\text{ м}/\text{с}^2$. Ответ выразите в сантиметрах.

9.3. В стакане находится некоторое количество воды, нагретой до температуры $t_1 = 80\text{ }^\circ\text{C}$. Когда в стакан кладут металлический шарик, имеющий температуру $t_0 = 20\text{ }^\circ\text{C}$, в стакане устанавливается темпера-

тура $t_2 = 60\text{ }^\circ\text{C}$. Какая температура t_3 установится в стакане после того, как в него опустят еще один такой же шарик, имеющий температуру $t_0 = 20\text{ }^\circ\text{C}$? Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь.

9.4. Ученик подключил к батарее амперметр и вольтметр, соединенные последовательно. При этом вольтметр показал напряжение $U_1 = 4\text{ В}$. Запомнив показания амперметра и вольтметра, ученик подключил параллельно вольтметру второй точно такой же вольтметр и обнаружил, что показания вольтметров стали равными $U_2 = 3,5\text{ В}$. После этого он разобрал цепь и подключил амперметр прямо к полюсам батарейки. Во сколько раз n показание амперметра в этом случае отличалось от первоначального?

9.5. Труба внутренним диаметром $d = 2,5\text{ см}$ расположена горизонтально и заполнена жидкостью с показателем преломления $n = \sqrt{2} \approx 1,414$. Жидкость движется с некоторой скоростью и вытекает из открытого конца трубы свободной струей. По оси трубы распространяется узкий световой пучок. Какова должна быть скорость течения жидкости v_0 , чтобы пучок вышел в воздух при первом падении на границу струи? Изменением поперечного сечения струи при движении жидкости в воздухе можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10\text{ м/с}^2$. Ответ выразите в см/с.

Задание для 10-го класса

10.1. Два маленьких шарика подвешены на нитях разной длины так, что в положении равновесия нити вертикальны, а шарики соприкасаются друг с другом и их центры находятся на одной горизонтали. Длина нити подвеса левого шарика $l_1 = 10\text{ см}$, отношение масс шариков $m_2/m_1 = n = 3$. Левый шарик отклоняют на некоторый угол α от вертикали и отпускают без начальной скорости. Определите величину α (в градусах), если максимальная высота, на которую поднимается левый шарик после первого соударения с правым шариком, $h_1 = 1,25\text{ см}$. Нити считайте невесомыми и нерастяжимыми, соударение шариков – абсолютно упругим.

10.2. В гладком вертикальном цилиндре под невесомым поршнем площадью $S = 0,01 \text{ м}^2$ находится воздух при температуре $t = 100^\circ\text{С}$ и относительной влажности $\varphi = 20\%$. Какую массу m песка нужно медленно насыпать на поршень, чтобы на стенках цилиндра выступила роса? При расчетах считайте температуру воздуха в цилиндре постоянной, атмосферное давление равным $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, ускорение свободного падения равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

10.3. Ученик собрал электрическую цепь, схема которой изображена на рис. 24. Исследуя свойства этой цепи, он обнаружил, что ток через резистор R_1 не зависит от положения движка реостата R . Найдите величины \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 ЭДС батарей в этой цепи, если внутренние сопротивления каждой из них $r = 5 \text{ Ом}$, сопротивление резистора $R_1 = 15 \text{ Ом}$, а ток через него $I = 10 \text{ А}$.

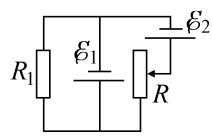


Рис. 24

10.4. Между пластинами плоского воздушного конденсатора создано однородное электрическое поле (рис. 25). Из некоторой точки с поверхности отрицательно заряженной пластины с одной и той же скоростью $v_0 = 10 \text{ м/с}$ и под одним и тем же углом $\alpha = 60^\circ$ к пластине вылетают два маленьких шарика, один из которых не заряжен, а второй несет положительный заряд $q = 10^{-7} \text{ Кл}$. Незаряженный шарик возвращается к первой пластине после упругого удара о противоположную пластину. Заряженный шарик возвращается к первой пластине, не достигнув противоположной пластины. Какова масса m заряженного шарика, если известно, что оба шарика вернулись на первую пластину в одной и той же точке? Разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 1000 \text{ В}$. Действием силы тяжести и влиянием воздуха можно пренебречь. Считайте, что при ударе о пластину конденсатора незаряженный шарик заряда не приобретает. Ответ выразите в миллиграммах с точностью до сотых.

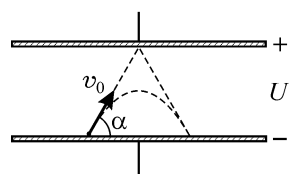


Рис. 25

10.5. На верхней поверхности слоя покоящейся жидкости расположен непрозрачный экран с маленьким круглым отверстием. На нижней горизонтальной границе слоя помещено плоское зеркало. Каков

будет радиус R освещенной области на нижней стороне экрана, если сверху отверстие осветить рассеянным светом? Толщина слоя $h = 10$ см, показатель преломления жидкости $n = \sqrt{2} \approx 1,414$. Ответ приведите в сантиметрах.

Задание для 11-го класса

11.1. Какая работа A была совершена двигателем при подъеме кабины лифта на высоту $H = 30$ м, если максимальная мощность, развиваемая двигателем при этом, составила $N_{\max} = 20$ кВт? Кабина начала движение из состояния покоя и в конце подъема остановилась. Полное время подъема кабины $\tau = 8$ с, разгон и замедление кабины происходили в течение одинакового времени $\tau_1 = 2$ с с постоянным по модулю ускорением, остальное время кабина двигалась равномерно. Коэффициент полезного действия двигателя считайте равным 100%, ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с². Ответ приведите в килоджоулях.

11.2. В тепловом двигателе, рабочим телом которого является идеальный одноатомный газ, совершается циклический процесс, изображенный на рис. 26, где участок $3-1$ – адиабатическое сжатие. Объем газа на участке $1-2$ увеличивается в $k = 2,5$ раза, а давление газа на участке $2-3$ уменьшается в $n = 4,6$ раза. Найдите коэффициент полезного действия цикла η . Ответ приведите в процентах, округлив до десятых.

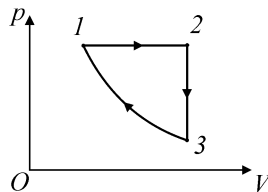


Рис. 26

11.3. Длинный полый картонный цилиндр радиуса r может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. К его боковой поверхности прикреплен один из концов непроводящей заряженной нити, свободно свисающей вниз (рис. 27). Полный заряд нити Q , длина нити $L \gg 2\pi r$. В момент времени $t = 0$ цилиндр начинают вращать вокруг его оси так, что смещение свободного конца нити зависит от времени по закону

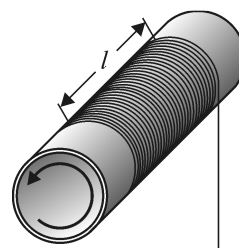


Рис. 27

$x(t) = \alpha\sqrt{t}$, где α – известная постоянная величина. При этом нить плотно, виток к витку, наматывается на цилиндр. Какова будет индукция B магнитного поля на оси цилиндра вдали от его концов после того, как на цилиндр наматается достаточно много витков, т.е. когда длина l обмотки (см. рисунок) будет значительно превышать диаметр цилиндра? Влиянием прямого участка нити на магнитное поле внутри цилиндра можно пренебречь. Магнитная постоянная μ_0 .

11.4. В цепи, схема которой показана на рис. 28, в некоторый момент замыкают ключ K . Найдите напряжение U на катушке к тому моменту, когда через резистор протечет заряд $q = 10^{-3}$ Кл. Индуктивность катушки $L = 10^{-3}$ Гн, сопротивление резистора $R = 4$ Ом, ЭДС источника $\mathcal{E} = 9$ В, а его внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом.

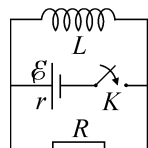


Рис. 28

11.5. На плоскую поверхность тонкой плосковогнутой линзы с фокусным расстоянием, модуль которого $F = 20$ см, падает световой луч под углом $\alpha = 30^\circ$ к главной оптической оси линзы (рис. 29). После преломления в линзе луч идет параллельно ее главной оптической оси. На какой угол γ отклонится этот луч, если на малом расстоянии от плоской поверхности линзы поместить параллельно ей плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $d = 2$ см с показателем преломления $n = \sqrt{2} \approx 1,414$? Ответ приведите в градусах, округлив до сотых.

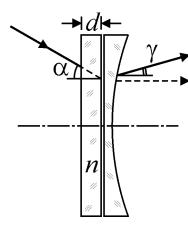


Рис. 29

ПРОФИЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН 2012

В 2012 профильный экзамен (дополнительное вступительное испытание) по физике в МГУ и в его Севастопольском филиале проводился в письменной форме. Типовое задание для абитуриента охватывало все основные разделы программы по физике для поступающих в МГУ: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. По каждому разделу программы абитуриенту предлагались краткий вопрос по теории и дополняющая его задача. На выполнение всего задания отводилось четыре астрономических часа. Ниже приводятся примеры заданий профильного экзамена.

I. Механика

I.1. Что такое сила? Как найти сумму сил, действующих на материальную точку?

Задача. Брусок массой $M = 2$ кг располагается на неподвижной наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. К бруску привязана нить, перекинутая через два легких блока: неподвижный 1 и подвижный 2 (рис. 30). Отрезки нити, идущие к подвижному блоку 2 , вертикальны, а отрезок нити от бруска до неподвижного блока 1 параллелен наклонной плоскости. К оси подвижного блока подвешен груз, масса m которого неизвестна. Когда систему предоставили самой себе, груз начал двигаться вниз с ускорением $a = 0,5$ м/с². Какова масса груза m ? Коэффициент трения между бруском и наклонной плоскостью $\mu = 0,2$. Нить считайте невесомой и нерастяжимой, трением в оси блоков пренебрегите. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

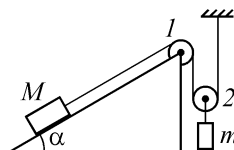


Рис. 30

I.2. Сформулируйте второй и третий законы Ньютона.

Задача. Шарик массой m , подвешенный на невесомой нерастяжимой нити, отклонили от вертикали на угол φ_0 и отпустили без начальной скорости. Найдите силу натяжения нити T как функцию угла отклонения шарика от вертикали φ .

I.3. Чему равны силы трения покоя и скольжения? Дайте определение коэффициента трения.

Задача. Олимпийская трасса для соревнований по бобслею в Лиллехаммере имеет перепад высот от старта до финиша $h = 107$ м. На стартовом горизонтальном участке («полоса разгона») спортсмены разогнали боб до скорости $v_0 = 6$ м/с, с которой пересекли линию старта. В конце спуска по ледяному желобу сразу после финиша используется специальное тормозное устройство для гашения скорости боба на горизонтальной поверхности. При этом коэффициент трения на участке торможения увеличивается пропорционально расстоянию x от линии финиша по закону $\mu(x) = \alpha \cdot x$, где α – некоторый постоянный коэффициент. Определите величину α , если тормозной путь боба составил $s = 42$ м. Примите, что на участке трассы от конца полосы разгона до финиша за счёт сил трения было потеряно $\eta = 20\%$ механической энергии боба, а ускорение свободного падения равно $g = 10$ м/с².

II. Молекулярная физика и термодинамика

II.1. Дайте определение идеального газа. Запишите уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева–Клапейрона).

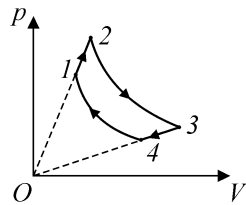


Рис. 31

Задача. На рис. 31 представлена pV -диаграмма циклического процесса, совершаемого над идеальным газом. На участках $2-3$ и $4-1$ температура газа постоянна. Определите объем V_3 этого газа в состоянии 3, если известно, что $V_1 = 1$ л, $V_2 = 1,4$ л и $V_4 = 2V_2$.

II.2. Какой газ называется идеальным? Запишите основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа и объясните смысл входящих в это уравнение величин.

Задача. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде под тяжелым поршнем, способным перемещаться без трения, находится идеальный одноатомный газ. Какую работу A совершит газ, если сообщить ему количество теплоты $Q = 100$ Дж? Теплоемкостью сосуда можно пренебречь.

II.3. Какие виды парообразования вы знаете? Дайте определение удельной теплоты парообразования.

Задача. Объём сосуда V , содержащего только насыщенный водяной пар при абсолютной температуре T , изотермически уменьшили в $n = 10$ раз. Определите изменение внутренней энергии системы «пар – вода». Удельная теплота парообразования воды равна r , молярная масса воды равна μ , давление насыщенных паров воды при температуре T равно p_n , универсальная газовая постоянная равна R . Считайте, что $300 \text{ K} < T < 600 \text{ K}$.

III. Электродинамика

III.1. Дайте определение напряженности электрического поля. Что такое линии напряженности электрического поля (силовые линии)?

Задача. Два шарика массой m каждый подвешены в одной и той же точке на нитях длиной L . Шарики соединены друг с другом нитью длиной l и несут одинаковые электрические заряды. Определите величину заряда q каждого из шариков, если известно, что в состоянии равновесия силы натяжения всех трех нитей одинаковы. Нити считайте невесомыми и непроводящими. Электрическая постоянная ϵ_0 , ускорение свободного падения g .

III.2. Что такое электродвижущая сила (ЭДС) источника? Сформулируйте условия существования постоянного тока в цепи.

Задача. При подключении к источнику поочередно двух сопротивлений нагрузки $R_1 = 4 \text{ Ом}$ и $R_2 = 1 \text{ Ом}$ выделяющаяся в них мощность оказалась одинаковой и равной $N = 9 \text{ Вт}$. Чему равна ЭДС \mathcal{E} источника?

III.3. Дайте определение потенциала электростатического поля. Запишите связь между разностью потенциалов и напряженностью электростатического поля.

Задача. В схеме, показанной на рис. 32, ключ K длительное время был замкнут. В момент времени $t = 0$ ключ размыкают. Определите закон изменения во времени заряда пластины конденсатора, подключенной при замкнутом ключе к

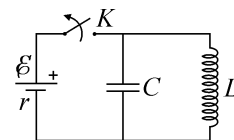


Рис. 32

положительному полюсу батареи. ЭДС батареи \mathcal{E} , её внутреннее сопротивление r , емкость конденсатора C . Индуктивность катушки L , её сопротивление пренебрежимо мало.

IV. Оптика

IV.1. Дайте определение светового луча. Сформулируйте законы преломления света.

Задача. Отрезок AB , параллельный главной оси собирающей тонкой линзы, расположен на расстоянии d от оси так, что его концы удалены от плоскости линзы на расстояния a и b соответственно (рис. 33). Найдите длину l изображения отрезка, если фокусное расстояние линзы F и $b > a > F$.

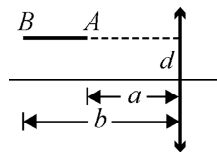


Рис. 33

IV.2. Какие линзы называются тонкими? Дайте определения фокусного расстояния и оптической силы тонкой линзы.

Задача. С помощью тонкой собирающей линзы получили увеличенное в $k = 5$ раз мнимое изображение предмета, расположенного вблизи главной оптической оси линзы. Если расстояние между линзой и предметом увеличить на $L = 10$ см, то размер изображения предмета уменьшится в $n = 2$ раза. Определите фокусное расстояние f линзы.

IV.3. Запишите формулу тонкой линзы. Чему равно увеличение, даваемое линзой?

Задача. Оптическая система состоит из двух тонких линз, главные оптические оси которых совпадают. Первая линза – собирающая, а вторая – рассеивающая. Фокусное расстояние собирающей линзы F . Расстояние между линзами равно $F/2$. Точечный источник света S расположен на главной оптической оси системы на расстоянии $a = 1,5 F$ перед собирающей линзой. Его изображение S_1 , создаваемое системой, является действительным и находится на расстоянии $b = 5 F$ за рассеивающей линзой. Определите отношение n оптической силы собирающей линзы к модулю оптической силы рассеивающей линзы.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ – 2012»

І. ЗАОЧНЫЙ ТУР

Задание для 7-х – 8-х классов

І.1. Пусть k – коэффициент жесткости одного куска веревки, а $m_{1,2}$ – массы Петрова и Васечкина. Тогда, в соответствии с законом Гука, $k\Delta l_{1,2} = m_{1,2}g$, откуда $m_{1,2} = \frac{k\Delta l_{1,2}}{g}$. При размещении мальчиков на доске их суммарный вес растягивает равномерно все четыре веревки, поскольку доска горизонтальна. Таким образом, $(m_1 + m_2)g = 4k\Delta l$, откуда $\Delta l = \frac{(m_1 + m_2)g}{4k} = \frac{k(\Delta l_1 + \Delta l_2)g}{4kg} = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{4} = 2$ см.

Ответ. Каждая из веревок растянулась на $\Delta l = 2$ см.

І.2. Проследим происходящее от того момента, когда из пещеры вышел Джон Сильвер. Он дошел до берега за время $t_1 = \frac{l}{v_2} = 0,5$ часа. За это время пираты пробежали по тропе расстояние $s_1 = v_1 t_1 = 2$ км. Таким образом, когда Сильвер и пираты двинулись навстречу друг другу по береговой тропе, между ними было $L - s_1 = L - \frac{v_1}{v_2} l = 4$ км. Скорость их сближения составляла $v_1 + v_2 = 6$ км/час. Поэтому их встреча произошла спустя время $t_2 = \frac{L - s_1}{v_1 + v_2} = \frac{v_2 L - v_1 l}{v_2(v_1 + v_2)} = \frac{2}{3}$ часа после того, как Сильвер подошел к берегу. На протяжении всего времени погони $t = t_1 + t_2 = \frac{L + l}{v_1 + v_2} = \frac{7}{6}$ часа попугай летал по острову с постоянной скоростью $u = 6$ км/час. Следовательно, он пролетел расстояние $s = ut = \frac{u(L + l)}{v_1 + v_2} = 7$ км.

Существует более простое решение, согласно которому можно считать, что движение пиратов и Сильвера навстречу друг другу началось уже в тот момент, когда Сильвер вышел из пещеры. Тогда они прошли в сумме $L+l=7$ км при скорости сближения $v_1+v_2=6$ км/час.

Тогда сразу определяется время погони $t = \frac{L+l}{v_1+v_2} = \frac{7}{6}$ часа, а затем и

$s = ut = \frac{u(L+l)}{v_1+v_2} = 7$ км. Впрочем, если заметить, что $v_1+v_2 = u$, то мож-

но сразу заключить, что $s = L+l = 7$ км. Решение задачи можно свести к пояснению того, что время полета попугая равно времени погони, а его скорость равна скорости сближения, поэтому его путь равен полному расстоянию, пройденному пиратами и Сильвером за время погони.

Ответ. Путь попугая за время погони $s = \frac{u(L+l)}{v_1+v_2} = L+l = 7$ км.

И.3. Пусть p – давление в шаре, а $m_{М,Д,О}$ – массы Маши, Даши и Оли. Пренебрегая (в соответствии с условием) весом шара и изменением давления при изменении нагрузки на шар, заключаем, в каждом случае суммарный вес двух девочек уравнивается давлением на шар со стороны пола, которое примерно равно (если не учитывать упругости оболочки) давлению воздуха на площадь опоры. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} (m_M + m_D)g = pS_1 \\ (m_M + m_O)g = pS_2 \\ (m_D + m_O)g = pS_3 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} S_2(m_M + m_D) = S_1(m_M + m_O) \\ S_3(m_M + m_D) = S_1(m_D + m_O) \end{cases}.$$

Отсюда $m_D = \frac{S_1 + S_3 - S_2}{S_1 + S_2 - S_3} m_M$, $m_O = \frac{S_1 + S_3 - S_2}{S_1 + S_2 - S_3} m_M$.

Подставляя числовые значения, находим, что $m_D = 20$ кг, $m_O = 26$ кг.

Ответ. Масса Даши 20 кг, масса Оли 26 кг.

И.4. Обозначим через x номер этажа, на котором находилась квартира преступников, а через N – число этажей в доме. Считая скорость движения лифта вверх и вниз одинаковой, имеем $\frac{N-x}{x-1} = n_1 = 3$,

откуда $4x - N = 3$. Аналогично получаем, что $\frac{N - x - k}{x + k - 1} = n_2 = 2$. Отсюда

$N - 3x = 3k - 2 = 4$. Решая эту систему уравнений относительно x и N , находим, что $x = 7$, $N = 25$.

Ответ. Квартира преступников находилась на 7 этаже в 25-этажном доме.

I.5. Механическая энергия шара – это его потенциальная энергия в поле тяжести Земли $E_0 = mgh$, которая далее переходит в кинетическую энергию шара $E_1 = \frac{mv^2}{2}$ и теплоту Q , поэтому $Q = mgh - \frac{mv^2}{2}$.

Количество теплоты, которая пошла на нагрев шара, по условию равно

$Q_1 = 0,8Q$. Увеличение температуры $\Delta t = \frac{Q_1}{cm} = 0,8 \cdot \frac{gh - v^2/2}{c} \approx 1,14^\circ\text{C}$.

Ответ. Увеличение температуры равно $\Delta t = \frac{2(2gh - v^2)}{5c} \approx 1,14^\circ\text{C}$.

I.6. Пусть I_1 – сила тока, текущего через резистор R_1 , I_2 – сила тока через резистор R_2 , I_3 – сила тока через резистор R_3 , I_4 – сила тока через резистор R_4 . Т.к. в цепи текут постоянные токи, то $I_3 + I_4 = I_1 + I_2$. Согласно закону Ома, $U = R_1 I_1 + R_4 I_4 = (5I_1 + I_4)R = (I_2 + I_3)R$, где U – напряжение между клеммами источника. Следовательно, $I_3 = 3I_1$. Со-

гласно закону Джоуля – Ленца, искомое отношение $n = \frac{N_3}{N_1} = \frac{R_3 I_3^2}{R_1 I_1^2} = 1,8$.

Ответ. На резисторе R_3 выделяется мощность, в $n = 1,8$ раза бóльшая, чем на резисторе R_1 .

Задание для 9-х – 11-х классов

I.7. После отпускания система начнет разгоняться за счет уменьшения потенциальной энергии, которая будет минимальна в положении равновесия системы. Поэтому максимальная скорость груза (так же как и гири, и массы обода) достигается именно в момент прохождения равновесия. Само положение равновесия определяется правилом моментов: момент силы тяжести, действующий на обод со стороны груза, и

момент силы натяжения нити должны стать равными. Отметим, что условие допускает два варианта начального состояния: в первом груз и точка сматывания нити находятся по разные стороны от оси колеса (рис. 34, а), а во втором – по одну (рис. 34, б).

В первом случае после отпущания обода гири начнёт подниматься вертикально вверх, а груз начнет опускаться. Пусть φ – угол поворо-

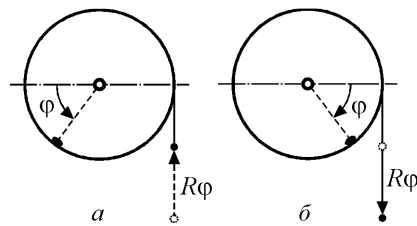


Рис. 34

та колеса от начального положения. Тогда условие равновесия $2mgR \cos \varphi = mgR$ (здесь g – модуль ускорения свободного падения), что соответствует $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$. Согласно зако-

ну сохранения механической энергии для системы обод, груз, гири и Земля, а также условию задачи,

должно иметь место равенство $2mgR \sin \varphi - mgR\varphi = \frac{(m + 2m + m)v^2}{2}$.

Следовательно, в первом случае максимальная скорость

$$v_{\max} = \sqrt{(\sin \varphi - \varphi/2)gR} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}} gR.$$

Во втором случае гири начинает опускаться, а условие равновесия $-2mgR \cos \varphi = mgR$ соответствует $\varphi = \pi - \arccos(0,5) = 2\pi/3$. Аналогично первому случаю, из закона сохранения энергии получаем:

$$2mgR \sin \varphi + mgR\varphi = \frac{(m + 2m + m)v^2}{2}, \text{ откуда } v_{\max} = \sqrt{(\sin \varphi + \varphi/2)gR} =$$

$$= \sqrt{\frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{6}} gR. \text{ Кроме того, в этом случае полная механическая энергия системы такова, что точка неустойчивого равновесия } \varphi' = \pi + \arccos(0,5) = 4\pi/3 \text{ (которая соответствует локальному максимуму потенциальной энергии) достигается с ненулевой скоростью:}$$

$$v' = \sqrt{\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}} gR, \text{ поэтому обод будет крутиться дальше, и пройдя начальное положение, совершит затем второй, третий и т.д. оборот. Ясно, что за каждый полный оборот кинетическая энергия системы увели-$$

чивается на $\Delta E = mg \cdot 2\pi R$, поэтому при прохождении точки равновесия

на $n+1$ -ом круге скорость груза $v_{\max}^{(n+1)} = \sqrt{\left[\frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{6} + \pi n \right] gR}$, а макси-

мальная скорость за все время движения будет достигнута после того, как вся нить размотается, и зависит от длины нити.

Ответ. Если вначале груз и точка, в которой нить сматывается с обода,

находятся по разные стороны от оси, то $v_{\max} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3} - \pi}{6} gR}$, если по

одну сторону – то максимальная скорость за время первого оборота обо-

да $v_{\max}^{(1)} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{6} gR}$, а максимальная скорость за все время движе-

ния будет достигнута после того, как вся нить размотается и зависит от длины нити.

I.8. Будем считать началом отсчета времени момент, когда кубик начал таять (до этого момента вода в емкости отсутствовала). Количество теплоты, поглощенное кубиком к моменту времени t , равно $Q = qt$. Поэтому масса кубика при таянии будет уменьшаться по закону

$m(t) = m - \frac{q}{\lambda} t$. С другой стороны, объем кубика $V(t) = \frac{m(t)}{\rho} = \frac{m}{\rho} - \frac{q}{\lambda\rho} t$,

и при условии сохранения формы длина его ребра $a(t) = \left(\frac{m}{\rho} - \frac{q}{\lambda\rho} t \right)^{1/3}$.

При небольшом уровне воды кубик своим весом выдавливает из-под себя воду и остается лежать на дне. Поскольку объем образовавшейся

воды $V_1(t) = \frac{m - m(t)}{\rho_0} = \frac{q}{\lambda\rho_0} t$, а площадь водяного слоя $S_1(t) =$

$= S - a^2(t) = S - \left(\frac{m}{\rho} - \frac{q}{\lambda\rho} t \right)^{2/3}$, то высота водяного слоя $h(t) = \frac{V_1(t)}{S_1(t)} =$

$$= \frac{qt}{\lambda\rho_0 \left[S - \left(\frac{m}{\rho} - \frac{q}{\lambda\rho} t \right)^{2/3} \right]}.$$

Когда сила Архимеда, действующая на погруженную часть кубика, окажется равной силе тяжести, кубик всплывет. Этот момент времени (t_1) определяется из уравнения $\rho_0 h(t) a^2(t) = \rho a^3(t)$, или $\rho_0 h(t) = \rho a(t)$. Переписав его в виде $m - \rho a^3(t) = \frac{qt}{\lambda} = \rho a(S - a^2(t))$, откуда $a(t) = \frac{m}{\rho S}$, найдем, что $t_1 = \frac{\lambda m}{q} \left(1 - \frac{m^2}{\rho^2 S^3} \right) = \frac{19}{27} \frac{\lambda m}{q} \approx 3,45$ с. После

этого момента времени уменьшение объема погруженной части плавающего льда при таянии будет, в соответствии с законом Архимеда, в точности равно объему образовавшейся воды. Поэтому общий объем под поверхностью воды меняться не будет, и уровень воды будет оставаться неизменным и равным $h_{\max} = \frac{m}{\rho_0 S} = 1,2$ см при $t > t_1$ вплоть до

окончания таяния льда в момент времени $t_2 = \frac{\lambda m}{q} \approx 4,90$ с. Полученным выражениям соответствует график, приведенный в ответе.

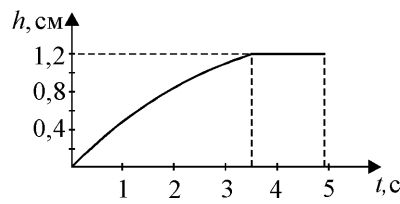


Рис. 35

Ответ. График зависимости уровня воды от времени изображен на рис. 35.

Примечание. При решении задачи следует иметь в виду, что цилиндры бывают не только круговыми. В емкость в виде кругового цилиндра кубик совсем чуть-чуть не влезет!

1.9. Пусть α – угол наклона луча по отношению к нормали к преломляющим поверхностям (то есть оси OY). Закон преломления можно переписать в виде $n(y) \cdot \sin \alpha = n_0 = \text{const}$, где $n_0 \equiv n(0)$ и учтено, что по условию $\sin \alpha(0) \approx \sin(\pi/2) = 1$. Так как луч – дуга окружности радиуса R , то $y = R(1 - \sin \alpha)$, откуда $\sin \alpha = \frac{R-y}{R}$. Поэтому

$n(y) \cdot \frac{R-y}{R} = n_0$ и $n(y) = n_0 \frac{R}{R-y}$. Видно, что для того чтобы направить

луч по дуге окружности, требуется увеличивать показатель преломления, и угловой размер дуги ограничивается именно этим. Имеем

$$\varphi_{\max} = \frac{\pi}{2} - \alpha_{\min}, \quad \sin \alpha_{\min} = \frac{R - y_{\max}}{R} = \frac{n_0}{n_{\max}}. \quad \text{Следовательно, } \varphi_{\max} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n_0}{n_{\max}}\right) = \arccos\left(\frac{n_0}{n_{\max}}\right).$$

Итак, угловой размер дуги будет максимально возможным, если n_0 будет как можно меньшим, а n_{\max} – как можно большим. Для естественных материалов $n_{\min} \approx 1$, а максимальным показателем преломления среди доступных во времена Снелла прозрачных материалов обладает алмаз с $n_{\max} \approx 2,42$. Таким образом, $\varphi_{\max} \approx \arccos\left(\frac{1}{2,42}\right) \approx 65,6^\circ$.

Ответ. $n(y) = n_0 \frac{R}{R-y}$, максимальный размер дуги определяется отношением минимального и максимального показателя преломления $\varphi_{\max} = \arccos\left(\frac{n_{\min}}{n_{\max}}\right) \approx 65,6^\circ$, если первым является слой практически не преломляющего материала, а последним – алмазный слой.

I.10. В плоском конденсаторе, у которого $d \ll \sqrt{S}$, практически все силовые линии, выходящие (для $q > 0$) из внесенного внутрь конденсатора точечного заряда, должны оканчиваться на индуцированных зарядах заземленных пластин, то есть сумма зарядов пластин $q_1 + q_2 \approx -q$. При этом заряды пластин не изменяются при перемещении заряда внутри конденсатора параллельно пластинам (здесь везде слова «внутри конденсатора» означают, что заряд не оказывается вблизи края пластин, т.е. на расстояниях от края порядка d). Значит, индуцированные заряды пластин в рассматриваемом случае будут такими же, как и в случае, когда заряд q распределен по параллельной пластинам плоскости на том же расстоянии $0 < x < d$ от одной из пластин (далее будем считать ее «первой», а другую – «второй»). Значит, можно составить эквивалентную схему этой системы (см. рис. 36). Здесь, в соответствии с формулой для

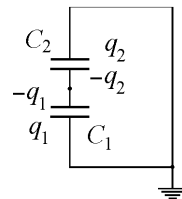


Рис. 36

емкости плоского конденсатора, $C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{x}$, $C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d-x}$. Сумма напряжений на конденсаторах равна нулю (с учетом полярности включения), поэтому $\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$, откуда $xq_1 = (d-x)q_2$. Совместно с уравнением для суммы зарядов это соотношение позволяет найти, что $q_1 \approx -\frac{d-x}{d}q$, $q_2 \approx -\frac{x}{d}q$. Это и есть индуцированные заряды пластин.

Ответ. $q_1 \approx -\frac{d-x}{d}q$, $q_2 \approx -\frac{x}{d}q$, причем первой считается пластина, от которой заряд находится на расстоянии x .

I.11. После замыкания ключа конденсатор разряжается через спираль, и в спирали выделяется в виде теплоты вся запасенная в нем при зарядке энергия $W = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} \approx 2,5 \cdot 10^{-3}$ Дж. В данной задаче для правильного выбора физической модели явления следует рассмотреть характерные времена протекания происходящих процессов. Учтем при этом, что конденсатор разряжается за характерное время $\tau_1 = RC = 10^{-4}$ с.

Далее происходит нагрев газа за счет теплообмена со спиралью. Для оценки времени протекания этого процесса примем следующую модель: теплообмен происходит за счет столкновений молекул газа с молекулами на поверхности спирали, и поэтому следует оценить время, за которое все молекулы гелия испытают такое столкновение. Пусть $s = \pi dl$ – площадь поверхности спирали (где d и l – диаметр и длина проволоки, из которой изготовлена спираль), а v – скорость движения молекул гелия. Тогда число соударений в единицу времени можно оценить как $\frac{\Delta N}{\Delta t} = nvs$, где $n = \frac{N}{V}$. В результате получаем характерное

время для теплообмена «спираль–гелий» $\tau_2 = \frac{SH}{vs}$. Скорость молекул

гелия $v = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$ в разумном интервале температур $T \approx 100 - 400$ К ока-

зывается больше или порядка 10^2 м/с. Разумные значения d и l можно подобрать, исходя из величины сопротивления $R = \rho \frac{4l}{\pi d^2}$. Например, для стальной проволоки (удельное сопротивление $\rho \approx 10^{-7}$ Ом·м) диаметром $d \approx 0,1$ мм необходимая для заданной величины сопротивления длина $l \approx 15$ м, что соответствует $s \approx 5 \cdot 10^{-3}$ м². Тогда $\tau_2 \approx 10^{-4}$ с. Вариации диаметра проволоки и материала (для «разумных» ситуаций ясно, например, что если выбранные значения требуют длины проволоки порядка или больше 10^3 м, то с учетом размеров объема под поршнем они «неразумны») приводят к вариациям τ_2 не более чем на порядок, и поэтому $\tau_2 \approx 10^{-5} - 10^{-3}$ с.

После нагрева газа давление его на поршень увеличивается, и он начинает двигаться вверх. Так как внутренняя энергия гелия $\frac{3}{2} pV = \frac{3}{2} mgh \approx 0,3$ Дж $\gg \frac{C\theta^2}{2}$, то сообщенную теплоту можно считать малой, а смещение поршня – небольшим. Для определения характерных времен перемещения поршня при малых отклонениях от положения равновесия вычислим период малых свободных колебаний поршня, пренебрегая изменением температуры. Уравнение колебаний

$$m\ddot{x} = (p_0 + \Delta p)S - mg = S\Delta p \approx p_0 S \left[\frac{H}{H+x} - 1 \right] \approx -mg \frac{x}{H} \quad (\text{здесь учтено, что}$$

для равновесного состояния $p_0 S = mg$) приводится к виду $\ddot{x} + \frac{g}{H} x = 0$,

и поэтому период колебаний $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g}} \approx 0,45$ с. Теперь становится ясно,

что, поскольку $\tau \gg \tau_{1,2}$, то за время нагрева гелия поршень практически не успевает сместиться, и нагрев происходит изохорно. Для гелия, который с хорошей точностью можно считать одноатомным идеальным газом, $Q = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} V \delta p$, откуда $\delta p = \frac{2}{3} \frac{W}{V} \approx 0,3 \cdot 10^2$ Па (если пренеб-

речь теплоемкостью спирали – см. примечание). Процесс поднятия поршня за счет работы газа является адиабатным. Он продолжается до тех пор, пока суммарная работа сил, действующих на поршень (силы тяжести и силы давления газа) не обратится в ноль (в этот момент,

согласно закону сохранения энергии, обратится в нуль скорость поршня): $mg \Delta h_{\max} = A_{\text{He}} \approx p \Delta V$. В адиабатном процессе

$Q = p \Delta V + \Delta \left(\frac{3}{2} pV \right) = \frac{3}{2} V \Delta p + \frac{5}{2} p \Delta V = 0$, поэтому работа на малом участке $p \Delta V \approx -\frac{3}{5} V \Delta p$. Так как гармонические колебания симметричны относительно положения равновесия, то в процессе подъема поршня

$\Delta p = -2 \delta p = -\frac{4W}{3V}$ и, следовательно $A_{\text{He}} \approx \frac{4}{5} W$. Таким образом,

$$\Delta h_{\max} = \frac{A_{\text{He}}}{mg} = \frac{2 C \mathcal{E}^2}{5 mg} \approx 0,5 \text{ мм (здесь принято, что } g \approx 10 \text{ м/с}^2\text{)}.$$

Примечание. На самом деле стандартное для подобных задач пренебрежение теплоемкостью спирали – не очень хорошее приближение. Например, если спираль изготовлена из стальной проволоки диаметром 0,1 мм, то ее теплоемкость будет примерно равна $C_{\text{сп}} \approx 0,5$ Дж/К, в то время как теплоемкость гелия (при «разумных» предположениях о температурном режиме) $C_{\text{He}} \approx 0,002 - 0,005$ Дж/К, т.е. при установлении равновесия гелий получит не более 1% теплоты, выделившейся в спирали при протекании тока). Но тогда в процессе расширения гелия снижения его температуры происходить не будет – спираль будет играть роль «теплоаккумулятора» и поддерживать почти постоянную температуру гелия. Таким образом, при учете теплоемкости

$$\begin{aligned} \text{спирали } \delta p &\approx 10^{-2} \cdot \frac{2W}{3V} \approx 0,3 \text{ Па, и } mg \Delta h_{\max} = A_{\text{He}} \approx p \Delta V \approx -V \Delta p = \\ &= 2V \delta p \approx 10^{-2} \frac{4W}{3}, \text{ откуда } \Delta h_{\max} \approx (0,4 - 1) \cdot 10^{-2} \frac{2C \mathcal{E}^2}{3mg} \approx 0,003 - 0,008 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Ответ. Максимальная высота поднятия поршня: в модели без учета теплоемкости спирали $\Delta h_{\max} = \frac{2 C \mathcal{E}^2}{5 mg} \approx 0,5$ мм; при учете теплоемкости

$$\text{спирали } \Delta h_{\max} \approx (0,4 - 1) \cdot 10^{-2} \frac{2C \mathcal{E}^2}{3mg} \approx 0,003 - 0,008 \text{ мм.}$$

I.12. Решение этой задачи может содержать некоторую неопределенность: из условия ясно, что процесс должен быть циклическим, од-

нако условие допускает два варианта циклического процесса: цикл от состояния покоя до состояния покоя и цикл от заданной ненулевой начальной скорости до этой же конечной скорости (во втором случае для «запуска» циклического процесса необходим предварительный разгон саней).

Рассмотрим сначала первый вариант цикла. Ясно, что смещение саней происходит за счет того, что при резком разгоне и торможении ядра водителем силы взаимодействия его с ядром велики, и сила трения о поверхность дороги не может удержать сани от скольжения (оба раза – вперед). При плавном же торможении и разгоне ядра пружиной сила трения существенна и – в оптимальном для работы устройства режиме – вообще должна удерживать сани от проскальзывания назад. Рассмотрим поэтапно все процессы в одном цикле работы (скорости всех тел будем вычислять в системе отсчета, связанной с Землей, считая ее инерциальной):

1). Водитель выталкивает ядро: процесс происходит «очень быстро», и внешней силой трения можно пренебречь по сравнению с внутренними силами. Для определения скорости v_1 , которую приобретают сани с водителем, используем закон сохранения горизонтальной компоненты импульса: $Mv_1 = m(u - v_1)$, откуда $v_1 = \frac{m}{M+m}u$. Увеличение механической энергии системы происходит за счет работы водителя:

$$A_1 = \frac{m(u - v_1)^2}{2} + \frac{Mv_1^2}{2} = \frac{mMu^2}{2(M+m)}.$$

2) Движение ядра и саней: ядро движется с постоянной скоростью $v_0 = u - V_1 = \frac{M}{M+m}u$, а сани тормозятся силой трения

$F_{\text{тр}} = \mu(M+m)g$, то есть движутся равноускоренно вплоть до остановки. Поскольку для наиболее эффективной работы механизма нужно, чтобы смещение саней на этой стадии было максимальным, а скорость столкновения ядра с пружиной – минимальной, то рассмотрим случай, когда сани останавливаются до столкновения ядра с пружиной. Тогда смещение саней

$$s_1 = \frac{v_1^2}{2a} = \frac{M}{2\mu(M+m)g} \left(\frac{mu}{M+m} \right)^2 = \frac{Mm^2u^2}{2\mu(M+m)^3g},$$

а ядро сталкивается с покоящейся относительно Земли пружиной. Смещение

$$\begin{aligned} \text{ядра по отношению к саням составляет величину } l &= v_0 \frac{V_1}{a} + s_1 = \\ &= \frac{M}{\mu(M+m)g} \frac{Mu}{M+m} \frac{mu}{M+m} + \frac{Mm^2u^2}{2\mu(M+m)^3g} = \frac{Mm(2M+m)u^2}{2\mu(M+m)^3g}. \end{aligned}$$

3) Отражение ядра от пружины: если в этом процессе сила трения удержит сани от скольжения, ядро под действием силы упругости пружины совершит половину периода гармонических колебаний, циклическая частота которых $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, и начнет скользить по желобу в направ-

лении носа саней снова со скоростью $v_0 = \frac{M}{M+m}u$. Так как в момент касания пружины и ядра пружина не деформирована, то максимальное сжатие пружины соответствует амплитуде смещения

$$x_0 = \frac{v_0}{\omega} = \frac{Mu}{M+m} \sqrt{\frac{m}{k}}, \text{ а максимальная величина силы упругости пружины } F_0 = kx_0 = \frac{Mu}{M+m} \sqrt{mk}.$$

Проверим выполнение предположения о том, что сани на этом этапе не скользят. Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие $F_0 \leq \mu(M+m)g$, или $Mu\sqrt{mk} \leq \mu(M+m)^2g$. Подставляя числовые значения, убеждаемся в том, что это условие выполнено и сани действительно не двигаются с места во время отражения ядра от пружины.

4) Водитель останавливает ядро, которое скользит к нему со скоростью $v_0 = \frac{M}{M+m}u$. В соответствии с законом сохранения импульса, сани с водителем и ядром приобретут скорость

$$v_2 = \frac{m}{M+m}v_0 = \frac{mM}{(M+m)^2}u.$$

Уменьшение механической энергии системы обусловлено работой водителя $A_2 = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{(M+m)v_2^2}{2} = \frac{mM^3u^2}{2(M+m)^3}$.

До остановки сани пройдут путь

$$s_2 = \frac{v_2^2}{2a} = \frac{M}{2\mu(M+m)g} \left(\frac{mMu}{(M+m)^2} \right)^2 = \frac{M^3m^2u^2}{2\mu(M+m)^5g}.$$

Итак, полный путь саней за цикл равен $\Delta s = s_1 + s_2 = \frac{M m^2 (2M^2 + 2Mm + m^2) u^2}{2\mu(M + m)^5 g}$, а полная совершенная водителем работа $\Delta A = A_1 + A_2 = \frac{Mm(2M^2 + 2Mm + m^2)u^2}{2(M + m)^3}$. Ясно, что работа водителя при перемещении саней на $s = 1$ км, равна $A \approx \frac{\Delta A}{\Delta s} s = \frac{(M + m)^2}{m} \mu g s$. С учетом введенных в условии предположений минимальная масса топлива (шоколада), необходимая для компенсации энергетических потерь, $m_{\text{ш}} = \frac{2A}{q} \approx \frac{2(M + m)^2}{mq} \mu g s \approx 0,170$ кг.

Для того чтобы наиболее эффективный режим был реализован, длина саней заведомо должна превышать сумму смещения ядра относительно саней на этапе 2, а именно $l = \frac{Mm(2M + m)u^2}{2\mu(M + m)^3 g}$, и длины пружины, которая, в свою очередь, должна быть больше величины максимальной деформации пружины $x_0 = \frac{Mu}{M + m} \sqrt{\frac{m}{k}}$. Итак

$L > \frac{Mm(2M + m)u^2}{2\mu(M + m)^3 g} + \frac{Mu}{M + m} \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 4,43$ м. Конечно, реальные размеры должны быть еще больше – ведь на санях еще должен поместиться водитель, да и пружина не должна сжиматься до нулевой длины.

Аналогично можно рассмотреть и алгоритм с предварительным разгоном. В этом случае наиболее экономичный режим выглядит так: после выталкивания ядра сани должны полностью остановиться, и отражение ядра от пружины должно происходить при покоящихся санях; после возвращения ядра к водителю он должен сразу поймать его и вытолкнуть назад (практически «мгновенно», причем мы считаем этот процесс упругим – это, конечно, повышает требования к прочности самого водителя). Скорость v_1 , которую в этом алгоритме имеют сани сразу после выталкивания ядра водителем, следует определить из условия цикличности: после толчка ядро относительно Земли должно скользить назад со скоростью $u - v_1$, и после остановки саней и отражения ядра от пружины ядро с такой же скоростью приближается к водителю,

а после поимки и обратного его выталкивания сани с водителем опять должны приобрести скорость v_1 . По закону сохранения импульса для «мгновенного» обращения скорости ядра водителем $m(u - v_1) = Mv_1 - m(u - v_1)$, откуда $v_1 = \frac{2m}{M + 2m}u$. Так как скорость движения ядра в момент касания пружины при полной остановке саней $u - v_1 = \frac{M}{M + 2m}u$ меньше, чем в первом алгоритме, то сани тем более не будут двигаться в процессе отражения ядра от пружины. Путь саней за цикл равен пути торможения от скорости v_1

$\Delta s = \frac{v_1^2}{2a} = \frac{2Mm^2u^2}{\mu(M + m)(M + 2m)^2g}$, а работа водителя равна увеличению кинетической энергии системы при обращении скорости ядра: $\Delta A = \frac{Mv_1^2}{2} = \frac{2Mm^2u^2}{(M + 2m)^2}$. Поэтому в данном алгоритме $A \approx \frac{\Delta A}{\Delta s} s = (M + m)\mu g s$. Как видно, в этом режиме эффективность заметно выше.

Значит, в этом случае $m_{\text{ш}} = \frac{2A}{q} \approx \frac{2(M + m)\mu g s}{q} \approx 0,017$ кг. Изменяются и

требования к длине саней: $L > \frac{2Mmu^2}{\mu(M + 2m)^2g} + \frac{Mu}{M + 2m} \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 5,84$ м.

Ответ 1. Расход шоколада на 1 км пути $m_{\text{ш}} \approx \frac{2(M + m)^2}{mq} \mu g s \approx 170$ г,

длина саней должна заведомо превышать

$L_{\text{min}} = \frac{Mm(2M + m)u^2}{2\mu(M + m)^3g} + \frac{Mu}{M + m} \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 4,43$ м с добавлением дополни-

тельного места для размещения водителя и сжатой пружины.

Ответ 2. расход шоколада на 1 км пути $m_{\text{ш}} \approx \frac{2(M + m)\mu g s}{q} \approx 17$ г, длина

саней должна превышать $L_{\text{min}} = \frac{2Mmu^2}{\mu(M + 2m)^2g} + \frac{Mu}{M + 2m} \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 5,84$ м

с добавлением дополнительного места для размещения водителя и сжатой пружины.

II. ОЧНЫЙ ТУР

Задание для 7-х – 9-х классов

II.1. Пусть длина эскалатора L , модуль скорости движения человека по эскалатору v , модуль скорости движения эскалатора u , искомое время t . Тогда справедливы равенства $L = (v + u)t_1$, $L = ut_2$,

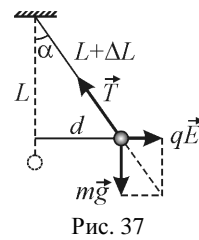
$$L = \frac{v}{n}t. \text{ Отсюда } t = \frac{nt_1t_2}{t_2 - t_1} = 15 \text{ мин.}$$

Ответ. $t = \frac{nt_1t_2}{t_2 - t_1} = 15 \text{ мин.}$

II.2. Поскольку при обычных условиях температура плавления льда равна $t_0 = 0^\circ\text{C}$, то после попадания маленького кристаллика в калориметр вода начнёт замерзать и при этом нагреваться. Отметим, что температура, при которой происходит замерзание, равна именно t_0 , т.е. вода сначала прогревается, а затем уже замерзает, а образующийся лёд сразу имеет температуру t_0 . Пренебрегая теплоёмкостью кристаллика льда, брошенного в калориметр, составляем уравнение теплового баланса $(Mc + c_k)(t_0 - t) = \lambda m$, откуда $m = \frac{Mc + c_k}{\lambda}(t_0 - t) \approx 65 \text{ г.}$

Ответ. $m = \frac{Mc + c_k}{\lambda}(t_0 - t) \approx 65 \text{ г.}$

II.3. Шарик находится в равновесии под действием сил, изображенных на рис. 37, где $m\vec{g}$ – сила тяжести, \vec{g} – ускорение свободного падения, $q\vec{E}$ – кулоновская сила, \vec{E} – напряженность электрического поля, \vec{T} – сила натяжения нити. При этом $T = \sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}$, а угол α отклонения нити от вертикали удовлетворяет условию $\sin \alpha = \frac{qE}{\sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}}$. Согласно закону Гука $k \Delta L = T$. Из рисунка видно, что горизонтальное перемещение шарика от его начального положения равно $d = (L + \Delta L) \sin \alpha$. Принимая



приближенно, что $L + \Delta L \approx L$, и учитывая записанные выше выражения, находим, что $d \approx \frac{LqE}{k\Delta L}$, причем $E = \frac{1}{q}\sqrt{(k\Delta L)^2 - (mg)^2}$. Поскольку созданное электрическое поле однородно, то $\Delta\varphi = Ed$. Окончательно получаем, что $\Delta\varphi = \frac{L[(k\Delta L)^2 - (mg)^2]}{kq\Delta L}$.

Ответ. $\Delta\varphi = \frac{L[(k\Delta L)^2 - (mg)^2]}{kq\Delta L}$.

II.4. Запишем условие равновесия рычага, на который действуют силы натяжения нитей, прикрепленных к его концам, а именно $T_1L_1 = T_2L_2$. Из условия равновесия грузов следует, что $m_1g = T_1$, $m_2g = 2T_2$. Выражая отсюда силы натяжения нитей и подставляя их в условие равновесия рычага, получаем, что $m_1L_1 = \frac{m_2L_2}{2}$, откуда

$$m_2 = \frac{2L_1}{L_2}m_1 = 4 \text{ кг.}$$

Ответ. $m_2 = \frac{2L_1}{L_2}m_1 = 4 \text{ кг.}$

II.5. Пусть ρ_0 , ρ_1 и ρ_2 – плотности воды, вещества тяжелого шара и вещества легкого шара соответственно. Когда тяжелый шар положили в пустой сосуд, давление на дно создавалось силой тяжести этого шара, то есть $P = \rho_1Vg$, где V – объем шара. После наливания воды шар остался лежать на дне, но давление уменьшилось благодаря действию силы Архимеда

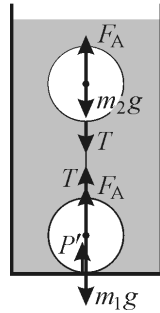


Рис. 38

$F_A = \rho_0Vg$, то есть $\frac{P}{2} = \rho_1Vg - \rho_0Vg = P - \rho_0Vg$. Отсюда легко найти, что $P = 2\rho_0Vg$ и $\rho_1 = 2\rho_0$. Для плавающего легкого шара условие равновесия дает равенство $\rho_2Vg = \rho_0\frac{V}{2}g$, откуда $\rho_2 = \frac{\rho_0}{2}$. На связанные нитью шары при полном погружении в воду легкого шара

действуют силы, модули и направления которых показаны на рис. 38. В этом случае справедливы уравнения

$$\rho_0 Vg = T + \frac{\rho_0}{2} Vg, \quad P' + T + \rho_0 Vg = 2\rho_0 Vg,$$

откуда $T = P' = \frac{\rho_0}{2} Vg$. Значит, $P' = \frac{P}{4}$.

Ответ. $P' = \frac{P}{4}$.

Задание для 10-х – 11-х классов

П.6. Ответ к задаче зависит от соотношения между величинами u и v . Рассмотрим вначале случай, когда $u > v$. Поскольку при взрыве выполняется закон сохранения импульса, то в системе отсчета, связанной с центром масс снаряда, осколки движутся в разные стороны со скоростями v и спустя время t после взрыва находятся на поверхности сферы радиуса vt . В неподвижной системе отсчета центр этой сферы за это же время сместится на расстояние ut (см. рис. 39). Следовательно, в неподвижной системе отсчета все осколки движутся внутри кругового конуса с углом раствора 2α таким, что $\sin \alpha = \frac{v}{u}$. В этом случае область на стенке, пораженная осколками,

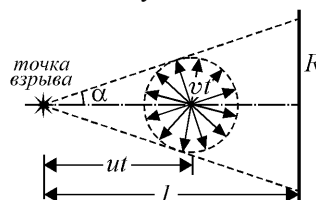


Рис. 39

имеет вид круга радиуса $R = l \operatorname{tg} \alpha = \frac{vl}{\sqrt{u^2 - v^2}}$ с площадью

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi v^2 l^2}{u^2 - v^2}.$$

Если скорость снаряда u меньше скорости разлёта осколков v , то в неподвижной системе отсчета из точки разрыва снаряда осколки полетят во всех направлениях, поэтому будет поражена вся поверхность стенки.

Ответ. При $u \leq v$ поражена вся поверхность стенки; при $u > v$ пораженная область – круг радиуса $R = \frac{vl}{\sqrt{u^2 - v^2}}$ и площадью $S = \frac{\pi v^2 l^2}{u^2 - v^2}$.

П.7. Поскольку $\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1 = \operatorname{tg} \alpha$, то ластик не может перемещаться без проскальзывания по линейке (резльтирующая сила реакции линейки $\vec{F} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$ должна быть направлена по перемещению, т.е. в отсутствие проскальзывания – под углом α к нормали к линейке). Значит, сила трения будет иметь величину $|\vec{F}_{\text{тр}}| = \mu N$, и \vec{F} будет составлять с нормалью угол $\beta = \operatorname{arctg} \mu$. Следовательно, ластик будет перемещаться в направлении, составляющем угол $\alpha - \beta$ с направлением перемещения линейки. Таким образом, в треугольнике, образованном вектором перемещения линейки \vec{S} , вектором перемещения ластика относительно стола $\vec{S}'_{\text{л}}$ и вектором смещения ластика относительно линейки $\vec{S}''_{\text{л}}$, угол напротив стороны $S'_{\text{л}}$ равен $\frac{\pi}{2} - \alpha$, а угол напротив S (см. рис. 40)

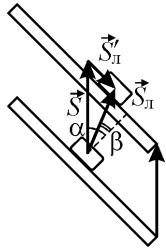


Рис. 40

По теореме синусов $S'_{\text{л}} = \frac{\sin(\pi/2 - \alpha)}{\sin(\pi/2 + \beta)} S = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} S = S \cos \alpha \sqrt{1 + \mu^2} = 15 \text{ см.}$

Ответ. $S'_{\text{л}} = S \cos \alpha \sqrt{1 + \mu^2} = 15 \text{ см.}$

П.8. Силы, действующие на брусок, изображены на рис. 41. Предполагая, что брусок движется равномерно, в проекциях на координатные оси OX и OY имеем

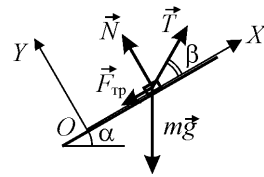


Рис. 41

$T \cos \beta - F_{\text{тр}} - mg \sin \alpha = 0,$
 $N + T \sin \beta - mg \cos \alpha = 0,$
 причем $F_{\text{тр}} = \mu N$. Исключая из этих уравнений N , находим, что $T = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\cos \beta + \mu \sin \beta}$. Прове-

дем анализ знаменателя выражения для силы T . По формуле вспомогательного аргумента имеем $\cos \beta + \mu \sin \beta = \sqrt{1 + \mu^2} \cos(\beta - \gamma)$, где

$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$, $\sin \gamma = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$. Максимальное значение этого выражения равно $\sqrt{1+\mu^2}$ и достигается при $\cos(\beta - \gamma) = 1$, т.е. при $\beta = \gamma = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} = \arcsin \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$. Таким образом, $T = T_{\min}$, если $\beta = \beta_{\min} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} = \arcsin \left(\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \right) = \operatorname{arctg} \mu$. При этом минимальное значение силы натяжения равно $T_{\min} = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\sqrt{1+\mu^2}}$.

Ответ. $\beta_{\min} = \arcsin \left(\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \right) = \operatorname{arctg} \mu$; $T_{\min} = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\sqrt{1+\mu^2}}$.

П.9. Из закона сохранения механической энергии следует, что $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh$, где v_0 – начальная скорость мяча, v – его скорость на высоте h . По условию $\frac{mv^2}{2} = mgh$. Значит, $\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{4}$. Искомый угол определяется из уравнения $\cos \beta = \frac{v_0 \cos \alpha}{v}$, откуда получаем, что $\cos \beta = \sqrt{2} \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\beta = 45^\circ$. Поскольку ускорение мяча равно ускорению свободного падения \vec{g} , то модули тангенциальной a_τ (направленной вдоль скорости) и нормальной a_n (направленной перпендикулярно скорости) составляющих его ускорения $a_\tau = \pm \frac{g}{\sqrt{2}}$, $a_n = \frac{g}{\sqrt{2}}$.

Ответ. $\beta = 45^\circ$; $a_\tau = \pm \frac{g}{\sqrt{2}}$; $a_n = \frac{g}{\sqrt{2}}$.

П.10. При движении шара по окружности сила натяжения нити работу не совершает, поэтому механическая энергия шара сохраняется.

Следовательно, $\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - mgl(1 - \cos \alpha)$, где α – угол отклонения нити от вертикали. По условию $\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{4}mgl(1 - \cos \alpha)$. Из записанных соотношений следует равенство $v_0^2 = \frac{5}{2}gl(1 - \cos \alpha)$. Силу натяжения нити легко найти из уравнения движения шара по окружности, а именно $m\frac{v^2}{l} = T - mg \cos \alpha$. Отсюда, используя закон сохранения энергии, получаем, что $T = m\left[\frac{v_0^2}{l} + g(3\cos \alpha - 2)\right]$. Следовательно, угол отклонения нити, при котором сила натяжения обращается в нуль, удовлетворяет условию $\cos \alpha = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{v_0^2}{gl}\right)$. Подставляя это выражение в записанное выше уравнение для v_0 , находим, что $v_0 = \sqrt{5gl} = 5 \text{ м/с}$.

Ответ. $v_0 = \sqrt{5gl} = 5 \text{ м/с}$.

П.11. Обозначим через a сторону уголка, через N_1, N_2 – модули нормальных составляющих сил реакции опоры, через F_1, F_2 – модули сил трения (см. рис. 42). Запишем условия равновесия уголка. Имеем для сил:

$$N_1 - N_2 = 0, \quad F_1 + F_2 - mg - P = 0,$$

для моментов сил относительно вершины уголка:

$$\frac{mg}{2} \cdot \frac{a}{2} + P \cdot a - N_2 \cdot a = 0.$$

Учтем далее, что $F_1 = \mu N_1, \quad F_2 = \mu N_2$. Из этих

уравнений находим $P = mg \frac{1 - \mu/2}{2\mu - 1}$.

Ответ. $P \geq mg \frac{1 - \mu/2}{2\mu - 1} = \frac{mg}{2}$.

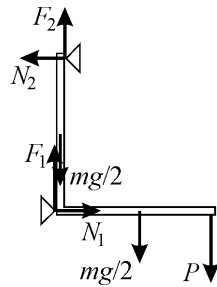


Рис. 42

II.12. Уравнения малых колебаний шарика имеют вид: в отсутствие магнита $ml\ddot{\alpha} \approx mg\alpha$, в присутствии магнита $ml\ddot{\alpha} \approx (mg + F)\alpha$. Здесь l – длина нити, α – угол отклонения нити от вертикали, F – магнитная сила, а двумя точками над буквой α обозначена вторая производная α по времени. Из этих уравнений находим круговые частоты малых колебаний шарика в первом и во втором случаях, а именно $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ и

$\omega = \sqrt{\frac{g + F/m}{l}}$. Периоды малых колебаний равны соответственно $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ и $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + F/m}}$. Отсюда искомая магнитная сила $F = mg\left(\frac{T_0^2}{T^2} - 1\right)$.

Ответ. $F = mg\left(\frac{T_0^2}{T^2} - 1\right)$.

II.13. Поскольку связь температуры газа с его массой и давлением выражается формулой $T = \frac{\mu V}{R} \frac{p}{m}$, то при постоянном объеме температура пропорциональна тангенсу угла наклона прямой, проведенной в точку с координатами (m, p) (рис. 43). Поэтому

$$\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \frac{\operatorname{tg}(\pi/4 + \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi/4 - \alpha)} = \left[\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} \right]^2.$$

С другой стороны, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{50}}$, следовательно,

$\cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{50}}$ и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$. Подставляя найденное значение $\operatorname{tg} \alpha$ в записанную выше формулу, находим $\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \frac{16}{9}$.

Ответ. $\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \frac{16}{9}$.

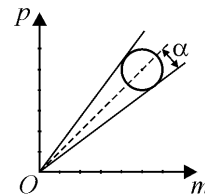


Рис. 43

II.14. Так как поршень находится в равновесии, то при температуре T_1 справедливо равенство $p_2 - p_1 = \frac{mg}{S}$, где m , S – масса и площадь поршня. Аналогичное равенство будет справедливо при температуре T_2 , а именно $p'_2 - p'_1 = \frac{mg}{S}$. Следовательно, $p_2 - p_1 = p'_2 - p'_1$. Объемы газа связаны соотношением $V_1 + V_2 = V'_1 + V'_2$. Из уравнений состояния газа при температурах T_1 и T_2 следует, что $p_1 V_1 = p_2 V_2$, $p'_1 V'_1 = p'_2 V'_2$. Отсюда $\frac{p_2}{p_1} = k$, $\frac{p'_2}{p'_1} = k'$. Тогда можно записать, что $p_1(k-1) = p'_1(k'-1)$ и $V_1\left(1 + \frac{1}{k}\right) = V'_1\left(1 + \frac{1}{k'}\right)$. Перемножим почленно эти уравнения и получим $p_1 V_1(k-1)\left(1 + \frac{1}{k}\right) = p'_1 V'_1(k'-1)\left(1 + \frac{1}{k'}\right)$. Из уравнений состояния газа следует, что $\frac{p_1 V_1}{p'_1 V'_1} = \frac{T_1}{T_2}$. В итоге получаем квадратное уравнение относительно k' , а именно $\frac{T_1}{T_2} \frac{k^2 - 1}{k} = \frac{k'^2 - 1}{k'}$. Физический смысл имеет положительный корень $k' = A + \sqrt{A^2 + 1}$, где $A = \frac{T_1}{T_2} \frac{k^2 - 1}{2k}$.

Ответ. $k' = A + \sqrt{A^2 + 1}$, где $A = \frac{T_1}{T_2} \frac{k^2 - 1}{2k}$.

II.15. Обозначим индексом «0» параметры газа в начальном состоянии, индексом «1» – в промежуточном состоянии, индексом «2» – в конечном состоянии. В соответствии с условием задачи и с уравнением состояния идеального газа имеем $V_2 = V_1 = \frac{V_0}{n}$, $p_2 V_2 = RT_2 = kRT_0 = k \cdot p_0 V_0$, откуда $p_2 = kn \cdot p_0 > p_0$. По первому закону термодинамики количества теплоты, которыми газ обменялся с внешними телами на отдельных участках процесса (рис. 44), равны

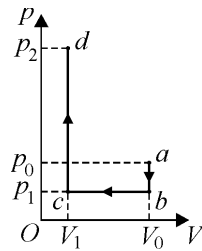


Рис. 44

$Q_{ab} = \frac{3}{2}(p_1 - p_0)V_0$, $Q_{bc} = \frac{5}{2}p_1(V_1 - V_0)$, $Q_{cd} = \frac{3}{2}(p_2 - p_1)V_1$. Полное количество теплоты $Q = Q_{ab} + Q_{bc} + Q_{cd} = -p_1 \frac{n-1}{n}V_0 + \frac{3}{2}(k-1)p_0V_0$. Учитывая, что по условию $Q = 0$, отсюда находим $p_1 = \frac{3n}{2(n-1)}(k-1)p_0 < p_0$. Значит, $\frac{p_{\max}}{p_{\min}} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{2k(n-1)}{3(k-1)} = 10$.
Ответ. $\frac{p_{\max}}{p_{\min}} = \frac{2k(n-1)}{3(k-1)} = 10$.

П.16. Рассмотрим pV -диаграмму исследуемого процесса, изображенную на рис. 45. На участке $1-2$ объем газа постоянен ($V = V_1 = \text{const}$). Поэтому давление газа на этом участке пропорционально его абсолютной температуре и в состоянии 2 равно $p_2 = 2p_1$. На участке $2-3$ давление газа постоянно и равно p_2 , а объем увеличивается и достигает в состоянии 3 значения $V_3 = 4V_1$. Используя уравнение процесса $3-1$, имеем $p_2V_3^n = p_1V_1^n$, или $2p_1(4V_1)^n = p_1V_1^n$. Отсюда следует уравнение $2^{2n+1} = 1$, решение которого $n = -\frac{1}{2}$.

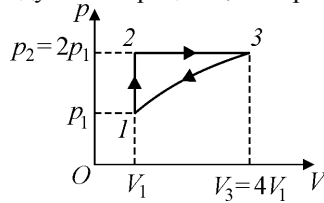


Рис. 45

Ответ. $n = -\frac{1}{2}$.

П.17. Относительная влажность воздуха по определению равна $\varphi = \frac{p}{p_{\text{нас}}} \cdot 100\%$. Отсюда находим, что давление водяного пара при температуре 100°C равно $p = \frac{\varphi p_0}{100\%}$. Массу m_1 водяного пара в объеме V найдем из уравнения Менделеева-Клапейрона. Она равна $m_1 = \frac{\varphi p_0 V \mu}{RT \cdot 100\%}$. После сжатия воздуха в n раз, часть водяного пара сконденсируется, а оставшийся пар массой m_2 станет насыщенным при

давлении p_0 , поэтому $m_2 = \frac{p_0 V \mu}{RTn}$. Масса сконденсировавшегося водяно-го пара $\Delta m = m_2 - m_1 = \frac{\Phi p_0 V \mu}{RT \cdot 100} - \frac{p_0 V \mu}{RTn} = \frac{p_0 V}{RT} \left(\frac{\Phi}{100} - \frac{1}{n} \right) = 0,029$ г.

Ответ. $\Delta m = \frac{p_0 V}{RT} \left(\frac{\Phi}{100} - \frac{1}{n} \right) = 0,029$ г.

П.18. Давление p влажного воздуха равно сумме парциальных давлений паров воды p_1 и сухого воздуха p_2 . Используя определение относительной влажности воздуха, имеем $p = p_1 + p_2 = \Phi p_{\text{нас}} + p_2$. Такое же утверждение справедливо и для плотности влажного воздуха, а именно $\rho = \rho_1 + \rho_2 = \frac{\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2}{RT} = \frac{\mu_1 \Phi p_{\text{нас}} + \mu_2 p_2}{RT}$. Выражая из первого уравнения $p_2 = p - \Phi p_{\text{нас}}$ и подставляя его во второе, находим относительную влажность воздуха $\Phi = \frac{\mu_2 p - \rho RT}{(\mu_2 - \mu_1) p_{\text{нас}}} \approx 0,5$.

Ответ. $\Phi = \frac{\mu_2 p - \rho RT}{(\mu_2 - \mu_1) p_{\text{нас}}} \approx 0,5$, или 50%.

П.19. Работа, совершенная неоном в изобарном процессе, $A = p_1(V_2 - V_1)$. Отсюда давление неона в начальном состоянии $p_1 = \frac{A}{V_2 - V_1}$. В соответствии с уравнением Менделеева–Клапейрона начальная температура неона $T_1 = \frac{p_1 V_1}{R} = \frac{V_1}{V_2 - V_1} \frac{A}{R}$, а его конечная температура $T_2 = \frac{p_2 V_2}{R}$. Отсюда $\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{R} \left[p_2 V_2 - \frac{V_1}{V_2 - V_1} A \right] \approx 72,2$ К.

Ответ. $\Delta T = \frac{1}{R} \left[p_2 V_2 - \frac{V_1}{V_2 - V_1} A \right] \approx 72,2$ К.

П.20. Из соображений симметрии понятно, что вектор напряженности поля, создаваемого зарядами, находящимися на одной палочке, на ее срединном перпендикуляре направлен вдоль этого

перпендикуляра. Центр квадрата находится на одинаковом расстоянии от его сторон, поэтому для системы из трех палочек вклады в общую напряженность от двух противоположных сторон квадрата дают в сумме нуль, и измеряемая напряженность равна вкладу от одной палочки (см. рис. 46, а). Для системы из двух палочек напряженность поля равна сумме двух одинаковых взаимно перпендикулярных напряженностей, то есть $|\vec{E}'| = \sqrt{2} |\vec{E}|$ (см. рис. 46, б), причем \vec{E}' повернут на 45° от \vec{E} в сторону убранной палочки.

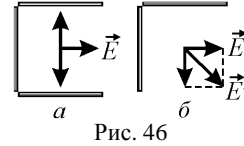


Рис. 46

Ответ. $|\vec{E}'| = \sqrt{2} |\vec{E}|$, причем \vec{E}' повернут на 45° от \vec{E} в сторону убранной палочки.

П.21. Потенциал первого шарика после соединения его с удаленным проводником равен $\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r}$, где ϵ_0 – электрическая постоянная, r – радиус шарика. На втором шарике при соединении его с проводником появится заряд Q_2 , а его потенциал будет определяться зарядами Q_1 и Q_2 , а именно $\varphi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R}$, где R – расстояние между шариками. Аналогично потенциал третьего шарика будет равным $\varphi_3 = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R}$. Так как все шарики соединились с одним и тем же проводником, имеющим постоянный потенциал, то $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$. Из записанных уравнений получаем, что $Q_3 = \frac{Q_2^2}{Q_1}$.

Ответ. $Q_3 = \frac{Q_2^2}{Q_1}$.

П.22. Обозначим через U' установившееся напряжение на обоих конденсаторах после соединения. Тогда выделившаяся в цепи теплота $Q = \frac{CU_1^2}{2} + \frac{CU_2^2}{2} - \frac{2CU'^2}{2}$. Поскольку емкости конденсаторов одинаковы, то после установления равновесия заряды на них тоже будут

одинаковыми и равными q' . Тогда $2q' = q_1 + q_2$, $2CU' = CU_1 + CU_2$, откуда $U' = \frac{U_1 + U_2}{2}$. Объединяя записанные выражения, получаем, что

$$Q = \frac{C(U_2 - U_1)^2}{4}.$$

Ответ. $Q = \frac{C(U_2 - U_1)^2}{4} = 0,4$ Дж.

П.23. Пусть после соединения конденсаторов на них установилось напряжение U' . По закону сохранения энергии выделившееся в цепи количество теплоты $Q = \frac{CU_1^2}{2} + \frac{CU_2^2}{2} - \frac{2CU'^2}{2}$. Поскольку емкости конденсаторов одинаковы, то после установления равновесия заряды на них тоже будут одинаковыми. Следовательно, справедливо равенство $2CU' = |CU_1 - CU_2|$, откуда $U' = \frac{|U_1 - U_2|}{2}$. Подставляя это значение в

выражения для Q , имеем $Q = \frac{C(U_1 + U_2)^2}{4}$. Решая последнее уравнение

относительно U_2 , получаем, что $U_2 = 2\sqrt{\frac{Q}{C}} - U_1 = 120$ В.

Ответ. $U_2 = 2\sqrt{\frac{Q}{C}} - U_1 = 120$ В.

П.24. Основная трудность задачи состоит в том, что первоначально неизвестно, каково состояние диодов. Предположим, что оба диода открыты, и стандартным методом решим задачу для схемы, в которой диоды заменяются на элементы с нулевым сопротивлением. Обозначим искомый ток через I и для определенности направим его снизу вверх, ток в ветви без резисторов через I_1 , а ток в ветви с резистором $2R$ – через I_2 . Тогда $I_1 = I + I_2$, а закон Ома для всех трех ветвей приводит к уравнениям $I \cdot R = 2\mathcal{E} - I_1 \cdot 2R = \mathcal{E} + I_2 \cdot 4R$. Из этих уравнений находим $I_1 = \frac{9}{14} \frac{\mathcal{E}}{R}$, $I_2 = -\frac{1}{14} \frac{\mathcal{E}}{R}$, $I = \frac{5}{7} \frac{\mathcal{E}}{R}$. Как видно, наше предполо-

жение не оправдывается: диод в левой ветви должен быть заперт. Убираем разомкнутую левую ветвь, и получаем простой контур, ток в котором $I = \frac{2\mathcal{E}}{2R+R} = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{E}}{R} = 0,8 \text{ A}$.

Ответ. $I = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{E}}{R} = 0,8 \text{ A}$.

П.25. На рис. 47 изображен вид на контур сверху. Используя правило левой руки, нетрудно убедиться в том, что при выбранном направлении тока в контуре силы Ампера F_1 и F_3 , приложенные к боковым сторонам контура, действуют вниз, а сила Ампера F_2 , приложенная к основанию контура, действует вверх. Контур оторвется от подставки, когда суммарный момент сил Ампера относительно оси OO_1 превысит момент силы тяжести mg относительно этой же оси. Силы Ампера, действующие на прямолинейные участки проводника с током в однородном магнитном поле, можно считать приложенными к серединам участков, а точкой приложения силы тяжести следует считать центр тяжести треугольника, совпадающий с его геометрическим центром. Суммарный момент сил Ампера равен

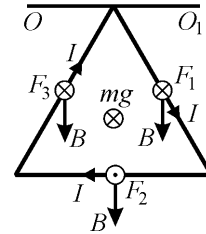


Рис. 47

$$M_A = -BIl \sin(30^\circ) \frac{\sqrt{3}}{4} l - BIl \sin(150^\circ) \frac{\sqrt{3}}{4} l + BIl \frac{\sqrt{3}}{2} l = \frac{\sqrt{3}}{4} BIl^2,$$

а момент силы тяжести составляет величину $M_{\text{тяж}} = mg \frac{l}{\sqrt{3}}$. Из условия

отрыва контура от опоры, а именно $M_A > M_{\text{тяж}}$, находим, что $I > \frac{4mg}{3Bl}$.

Ответ. $I > \frac{4mg}{3Bl}$.

П.26. Переключатель приходит в движение под действием силы Ампера $F_A = IBl$, где I – ток в контуре. По закону Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{\text{инд}}}{R+r}, \text{ где } \mathcal{E}_{\text{инд}} - \text{ЭДС индукции. По закону электромагнитной}$$

индукции $|\mathcal{E}_{\text{инд}}| = Blv$, где v – скорость перемычки. Максимальная скорость перемычки достигается в момент, когда $F_A - F_{\text{тр}} = 0$. При этом

$IBl = \mu mg$. Таким образом, $I = \frac{\mu mg}{Bl}$. Этот ответ корректен, если сила

Ампера может сдвинуть перемычку с места, то есть при $Bl \frac{\mathcal{E}}{R+r} > \mu mg$.

Ответ. $I = \frac{\mu mg}{Bl}$ при $\mathcal{E} > \frac{\mu mg(R+r)}{Bl}$; $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$ при $\mathcal{E} \leq \frac{\mu mg(R+r)}{Bl}$

(в этом случае перемычка не сдвинется с места).

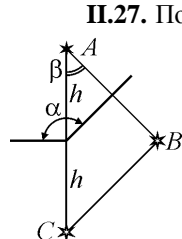


Рис. 48

П.27. Построение лучей показывает, что изображения источника, формируемые системой из плоских зеркал, не дают дополнительных изображений, так как отсутствуют лучи, испытывающие два отражения от разных зеркал. Поэтому на вопрос задачи существует однозначный ответ. В треугольнике ABC (рис. 48) угол $\beta = \pi - \alpha$, сторона $AC = 2h$, а сторона $AB = 2h \cos \alpha$. По теореме косинусов для этого треугольника имеем

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos \beta}.$$

Отсюда искомое расстояние $l = 2h \sin \beta = 2h \sin \alpha \approx 28,3$ см.

Ответ. $l = 2h \sin \alpha \approx 28,3$ см.

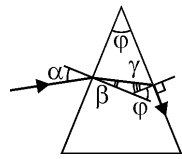


Рис. 49

П.28. Для угла γ падения луча на заднюю грань призмы должно выполняться условие полного внутреннего отражения,

т.е. $\sin \gamma = \frac{1}{n}$. Условие преломления на передней грани

имеет вид $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$. Из рис. 49 видно, что угол

$\beta = \varphi - \gamma$, поэтому $\sin \alpha = n \cdot \sin \beta = n \cdot \sin(\varphi - \gamma)$.

Ответ. $\alpha \leq \arcsin \left[n \sin \left(\varphi - \arcsin \frac{1}{n} \right) \right] \approx 4,78^\circ$

II.29. Минимальное значение показателя преломления n соответствует такому углу падения α_2 луча на правую грань призмы, при котором преломлённый луч будет «скользить» по этой грани (рис. 50). В этом случае угол падения α_2 является предельным углом полного внутреннего отражения. Если показатель преломления превышает это значение, то, как видно из хода лучей на рисунке, падающий луч в результате полностью отразится от правой грани призмы. Запишем закон преломления при переходе луча из одной среды в другую в точках A и C . Принимая показатель преломления среды, в которой находится призма, равным единице, имеем $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = n$, $\frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2} = \frac{1}{n}$. Так

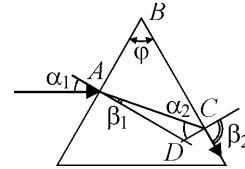


Рис. 50

как угол α_2 является предельным углом полного внутреннего отражения, то угол $\beta_2 = 90^\circ$. Сечением призмы является равносторонний треугольник, поэтому преломляющий угол призмы $\varphi = 60^\circ$, а угол падения $\alpha_1 = 30^\circ$. Сумма углов четырёхугольника $ABCD$ равна 360° . Углы при вершинах A и C равны 90° , поэтому угол при вершине D равен $180^\circ - \varphi$. Этот угол является одним из углов треугольника ACD , поэтому $\beta_1 + \alpha_2 = \varphi$. Соотношения, описывающие преломление луча на передней

и задней гранях призмы, принимают вид $\sin \frac{\varphi}{2} = n \sin \beta_1$, $\sin(\varphi - \beta_1) = \frac{1}{n}$.

Используя формулу $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ и подставляя $\varphi = 60^\circ$, выполним следующие преобразования: $\sin \beta_1 = \frac{1}{2n}$,

$$\cos \beta_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \beta_1} = \sqrt{1 - \frac{1}{4n^2}}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \beta_1 - \frac{1}{2} \sin \beta_1 = \frac{1}{n}, \quad \sqrt{3} \sqrt{4n^2 - 1} = 5.$$

Последнее соотношение позволяет определить, что $n = \sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1,53$.

Ответ. $n = \sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1,53$

II.30. Построение изображения предмета показано на рис. 51. По формуле тонкой линзы имеем $\frac{1}{F+l} - \frac{1}{F-l} = \frac{1}{F}$. Здесь учтено, что

изображение предмета является мнимым. Из этой формулы получаем квадратное уравнение относительно F , а именно $F^2 + 2lF - l^2 = 0$. Корни этого уравнения равны $F_{1,2} = -l \pm l\sqrt{2}$. Условию задачи удовлетворяет отрицательный корень $F = -l(1 + \sqrt{2}) \approx -9,7$ см.

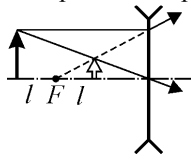


Рис. 51

Ответ. $F = -l(1 + \sqrt{2}) \approx -9,7$ см.

П.31. Построение изображения квадрата показано на рис. 52. Используя приведенные там обозначения, по формуле тонкой линзы имеем

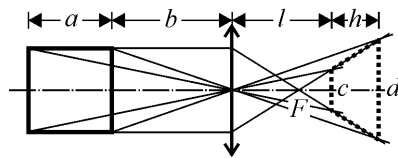


Рис. 52

ем $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{l} = \frac{1}{F}$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{l+h} = \frac{1}{F}$. Отсюда $l = \frac{F(a+b)}{a+b-F}$, $l+h = \frac{Fb}{b-F}$

и $h = \frac{Fa}{(b-F)(a+b-F)}$. Кроме того, из подобия треугольников, изображенных на рисунке, следует, что $c = \frac{al}{a+b} = \frac{Fa}{a+b-F}$,

$d = \frac{a(l+h)}{b} = \frac{Fa}{b-F}$. По формуле для площади трапеции получаем

$$S = \frac{1}{2}(c+d)h = \frac{F^3 a^2 (a+2b-2F)}{2(b-F)^2 (a+b-F)^2} \approx 3 \text{ мм}^2.$$

Ответ. $S = \frac{F^3 a^2 (a+2b-2F)}{2(b-F)^2 (a+b-F)^2} \approx 3 \text{ мм}^2$.

П.32. Границу светлого пятна на экране определяют лучи, преломляющиеся на краю линзы (рис. 53). Введем обозначения: $EC = r$, $OB = f$, $FC = a$, $AO = R_{л}$, $OF = F$. Из подобия треугольников AOB и ECB следует, что $\frac{r}{f-(F+a)} = \frac{R_{л}}{f}$.

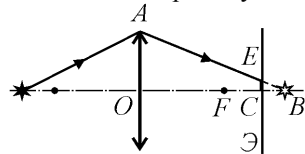


Рис. 53

По формуле тонкой линзы имеем

$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} = D$. Из записанных выражений получаем, что

$$r = \frac{R_{\text{л}}(1 - aD^2d + aD)}{Dd} = 2 \text{ см.}$$

Ответ. $r = \frac{R_{\text{л}}(1 - aD^2d + aD)}{Dd} = 2 \text{ см.}$

П.33. Необходимые построения выполнены на рис. 54. Поскольку источник расположен на двойном фокусном расстоянии от линзы перед ней, его действительное изображение находится на таком же расстоянии за линзой. Для того чтобы лучи, отраженные от зеркала, после вторичного прохождения через линзу, стали параллельными, нужно, чтобы мнимое изображение источника в зеркале совпало с правым фокусом линзы. Поэтому зеркало должно быть расположено посередине между фокусом и двойным фокусом линзы. Таким образом, $l = F + \frac{F}{2} = \frac{3F}{2}$.

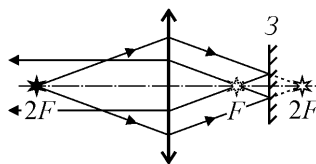


Рис. 54

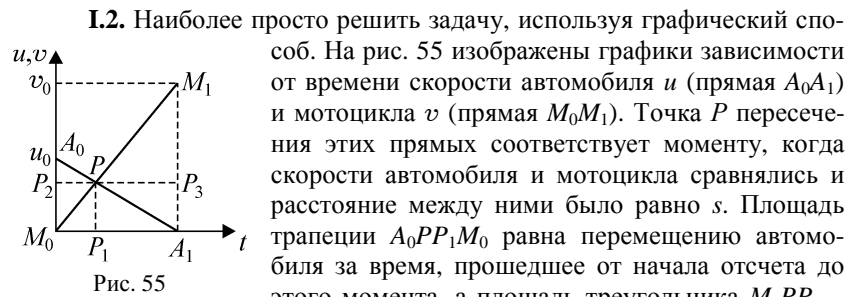
Ответ. $l = \frac{3F}{2}$.

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ – 2011/2012»

I. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

I.1. Пусть M – масса пустого кувшина, m – масса одной монеты, x – число недостающих монет. Тогда справедливо равенство $100m = M + (100 - x) \cdot m$, откуда $M = xm$. Учитывая соотношение между массой, объемом и плотностью тел, получаем $\rho_{\text{к}}V = x\rho_{\text{з}}v$, где $\rho_{\text{з}}$ и v – плотность золота и объем монеты, а $\rho_{\text{к}}$ и V – плотность керамики и объем кувшина. При погружении одной монеты в чан, заполненный водой, на блюдо вылилась вода объемом, равным объему одной монеты v . При погружении в чан кувшина с монетами на блюдо вылилась вода объемом, равным сумме объема кувшина и объема всех монет, лежащих

в кувшине, что в пересчете на стаканчики объемом, равным объему одной монеты, составляет nv , где $n = 273$. Имеем $nv = V + (100 - x)v$. Объединяя записанные выражения, находим, что $x = \frac{(n-100)\rho_k}{\rho_3 - \rho_k} = \frac{(273-100) \cdot 2000}{19300 - 200} = 20$. Таким образом, в кувшине не хватало $x = 20$ монет. Алладин получил от Султана $2 \cdot (100 - x) = 160$ монет.
Ответ. 160 монет.



Ответ. $v_0 = 2u_0 = 60$ км/ч; $S = 6s = 600$ м.

И.3. Разделив длину экватора 40 075 676 м на 24, найдем, что ширина часового пояса на экваторе равна 1 669 819,833 м. Для того чтобы две точки лежали в соседних часовых поясах, расстояние между ними

должно находиться в интервале от 1 669 820 м до 3 339 639,667 м. Заданное в условии кратчайшее расстояние между точками A и B находится именно в этом интервале, следовательно, точки A и B лежат в соседних часовых поясах, т.е. Новый год в точке B наступает на 24 часа позже, чем в точке A .

Так как точка B находится восточнее точки A , а по условию задачи сигнал о наступлении Нового года передается с востока на запад, то расстояние, на которое потребуется его передать, $L = 40\,075\,676 - 2\,015\,238,24 = 38\,060\,437,76$ м. Следовательно, каждый из $N = 194176$ участников игры передает сигнал на расстояние $\ell = \frac{L}{N} = 196,01$ м. В единицах СИ заданная скорость звука равна $v = 345,9$ м/с. Время распространения звука на расстояние ℓ равно $t = \frac{\ell}{v}$; время задержки сигнала t_0 . Следовательно, время передачи сигнала от одного человека к другому равно $T_1 = \frac{\ell}{v} + t_0 = \frac{L}{N \cdot v} + t_0$. До точки B сигнал потребуется передать $(N - 1)$ раз. Таким образом, время передачи сигнала от точки A до точки B равно $T_B = \left(\frac{L}{N \cdot v} + t_0\right)(N - 1) = 207120$ с = 3452 мин.

В точке B Новый год наступает через $T_{24} = 24$ часа = 1440 мин. после первого выстрела из хлопушки, а время, через которое участник, находящийся в этой точке примет сигнал, $T_B = 3452$ мин. Значит, искомого время, на которое запоздает с началом празднования участник, находящийся в точке B , равно

$$\Delta T = T_B - T_{24} = \left(\frac{\ell}{v} + t_0\right)(N - 1) - T_{24} = \left(\frac{215,4}{345,9} + 0,5\right)(184481 - 1) - 24 \cdot 3600 = 120720 \text{ с} = 2012 \text{ мин.}$$

Ответ. 2012 минут.

I.4. Пусть сопротивления резисторов равны R_1 и R_2 . Введем обозначения $k = \frac{R_1}{R_2}$, $n = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$. Сопротивление резисторов при их последовательном соединении равно $R_{\text{послед}} = R_1 + R_2 = (k + 1)R_2$, а при

параллельном соединении – $R_{\text{пар}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{k R_2}{k + 1}$. По закону Джоуля – Ленца выделенные на резисторах количества теплоты равны, соответственно $Q_{\text{посл}} = \frac{U^2}{R_{\text{посл}}} \Delta t_1$, $Q_{\text{пар}} = \frac{U^2}{R_{\text{пар}}} \Delta t_2$. Пусть C – суммарная теплоемкость масла и резисторов. Из уравнения теплового баланса $C \Delta T = Q$ следует, что $Q_{\text{посл}} = Q_{\text{пар}}$, или $\frac{\Delta t_1}{R_{\text{посл}}} = \frac{\Delta t_2}{R_{\text{пар}}}$. Используя введенные выше обозначения, получаем квадратное уравнение $k^2 - (n - 2)k + 1 = 0$, корни которого $k_{1,2} = \frac{n}{2} - 1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{n^2 - 4n}$. Подставляя значение $n = 4,5$, получаем $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{1}{2}$.

Ответ. $k_1 = \frac{n}{2} - 1 + \frac{1}{2} \sqrt{n^2 - 4n} = 2$; $k_2 = \frac{n}{2} - 1 - \frac{1}{2} \sqrt{n^2 - 4n} = \frac{1}{2}$,

где $n = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = 4,5$. Сопротивления резисторов отличаются в 2 раза.

I.5. Пренебрегая действием воздуха и силами трения качения, получаем, что модуль максимального ускорения автомобиля со всеми ведущими колёсами на горизонтальном участке дороги равен $a_{\text{max}} = \mu g$, где g – модуль ускорения свободного падения. Обгон закончится, когда задний бампер легкового автомобиля поравняется с передним бампером грузовика. В системе отсчета, связанной с грузовиком, легковой автомобиль за время обгона должен переместиться на расстояние $L + l$, а его скорость в момент начала обгона равна $v - u$. Обозначив через τ искомое время обгона, имеем $(v - u)\tau + \frac{a\tau^2}{2} = L + l$. Учитывая, что $a = \mu g$, получаем квадратное уравнение $\tau^2 - \frac{2(u - v)}{\mu g} \tau - \frac{2(L + l)}{\mu g} = 0$. Условию задачи удовлетворяет его положительный корень.

Ответ. $\tau = \frac{u - v + \sqrt{(v - u)^2 + 2\mu g(L + l)}}{\mu g} \approx 1,9$ с.

I.6. Левый кубик сдвинется с места, когда сила упругости растянутой пружины станет равной по модулю максимальному значению силы трения покоя, удерживающей его на месте, т.е. при условии, что $kx = \mu Mg$, где k – коэффициент жесткости пружины, x – ее растяжение. До тех пор, пока левый кубик остается неподвижным, растяжение пружины совпадает с модулем перемещения правого кубика и чаши. Масса m грузика, лежащего на чаше, минимальна, если левый кубик начнет сдвигаться в момент, когда правый кубик остановится. В этом случае изменение потенциальной энергии грузика mgx расходуется только на работу против сил трения при движении правого кубика и увеличение потенциальной энергии деформации пружины. Имеем

$mgx = \mu Mg x + \frac{kx^2}{2}$. Учитывая, что жесткость пружины может быть выражена через x как $k = \frac{\mu Mg}{x}$, в итоге получаем величину минимальной массы, а именно $m = \frac{3}{2}\mu M = 30$ г.

Ответ. $m = \frac{3}{2}\mu M = 30$ г.

I.7. Внутренняя энергия идеального одноатомного газа

$U = \frac{3}{2}\nu RT$ пропорциональна его абсолютной температуре T , где ν – количество газа, R – универсальная газовая постоянная. Поэтому на участке 2 – 3, представляющем собой отрезок параболы, $T \sim V^2$. Из уравнения состояния идеального газа $pV = \nu RT$ следует, что на этом участке $p \sim V$. Поскольку участок 1 – 2 – изобара, участок 3 – 1 – изохора, pV -диаграмма процесса представляет собой треугольник (см. рис. 56). Работу газа найдём, вычислив площадь этого треугольника:

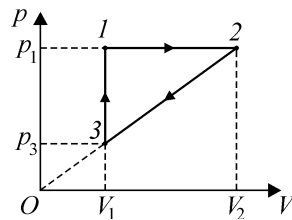


Рис. 56

$$A = \frac{1}{2}(p_1 - p_3)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}(p_1V_2 - p_3V_2 - p_1V_1 + p_3V_1).$$

Учитывая, что внутреннюю энергию идеального одноатомного газа можно представить как $U = \frac{3}{2} pV$, а также то, что точки 2 и 3 лежат на прямой проходящей через начало координат, перепишем выражение для работы газа в виде $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(U_2 - \frac{V_2}{V_1} U_3 - U_1 + U_3 \right)$. Используя данные из рисунка к условию задачи, получаем, что $A = \frac{1}{3} \left[3U_0 - U_0 - \frac{2}{3} U_0 \right] = \frac{4}{9} U_0 = 40$ кДж.

Ответ. $A = \frac{4}{9} U_0 = 40$ кДж.

1.8. Пусть p_a – атмосферное давление; m_v – масса верхнего поршня; m_n – масса нижнего поршня; $m_{пр}$ – масса пружины; F_v – модуль силы, действующей со стороны пружины на верхний поршень; F_n – модуль силы, действующей со стороны пружины на нижний поршень; g – модуль ускорения свободного падения. Массой гелия можно пренебречь, поэтому следует считать, что при равновесии давление p гелия во всех точках внутри трубы одинаково. Условия равновесия верхнего и нижнего поршней, а также пружины имеют вид: $m_v g + (p_a - p)S + F_v = 0$, $m_n g + (p - p_a)s + F_n = 0$, $m_{пр} g + F_n - F_v = 0$. Из

этих равенств находим $p = \frac{(m_v + m_n + m_{пр})g}{S - s} + p_a$. Таким образом, давление гелия остается постоянным. При охлаждении гелия длина пружины не изменяется, и процесс охлаждения является изобарным. По закону Гей-Люссака $\frac{HS + (L - H)s}{T_0} = \frac{(H - h)S + (L - H + h)s}{T}$, где T_0 – начальная температура гелия, $T = T_0 - \Delta T$ – его конечная температура.

Отсюда $\Delta T = \frac{(S - s)hT_0}{HS + (L - H)s}$.

Ответ. $\Delta T = \frac{(S - s)hT_0}{HS + (L - H)s}$.

1.9. Если в некотором промежутке времени расстояние от тела до точки бросания уменьшается, то в этом промежутке проекция вектора скорости тела на направление его радиус-вектора отрицательна, т.е. угол α между вектором скорости и радиус-вектором тела превышает 90° (см. рис. 57). При этом в моменты времени t_1 и t_2 вектор скорости перпендикулярен радиус-вектору и $\alpha = 90^\circ$. Следовательно, скалярное произведение этих векторов в промежутке времени от t_1 до t_2 должно удовле-

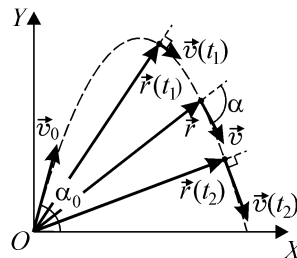


Рис. 57

творять неравенству $(\vec{v}, \vec{r}) = \left(\vec{v}_0 + \vec{g}t, \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} \right) \leq 0$. Раскрывая скобки и учитывая, что $(\vec{v}_0, \vec{v}_0) = v_0^2$, $(\vec{g}, \vec{g}) = g^2$, $(\vec{v}_0, \vec{g}) = -v_0 g \sin \alpha_0$, после сокращения на t приходим к неравенству $v_0^2 - \frac{3}{2} v_0 \sin \alpha_0 g t + \frac{g^2 t^2}{2} \leq 0$. Учитывая, что t_1 и t_2 – корни квадратного уравнения $v_0^2 - \frac{3}{2} v_0 \sin \alpha_0 g t + \frac{g^2 t^2}{2} = 0$, по теореме Виета имеем $t_1 + t_2 = \frac{3v_0 \sin \alpha_0}{g}$, $t_1 \cdot t_2 = \frac{2v_0^2}{g^2}$. Из последних равенств находим искомые величины: на-

чальную скорость тела $v_0 = g \sqrt{\frac{t_1 t_2}{2}}$, максимальную высоту подъема

$$H = \frac{(v_0 \sin \alpha_0)^2}{2g} = \frac{g(t_1 + t_2)^2}{18} \text{ и время полета } \tau = \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g} = \frac{2(t_1 + t_2)}{3}.$$

Для существования корней квадратного уравнения его дискриминант должен быть неотрицательным, т.е. должно выполняться условие

$$9 \sin^2 \alpha_0 \geq 8, \text{ или } \alpha_0 \geq \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}.$$

Ответ. $v_0 = g \sqrt{\frac{t_1 t_2}{2}}$, $H = \frac{g(t_1 + t_2)^2}{18}$, $\tau = \frac{2(t_1 + t_2)}{3}$,

$$\alpha_0 \geq \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2} \approx 70,5^\circ.$$

I.10. Для того чтобы отдельные снежинки отчетливо выделялись в свете проблескового огня, необходимо, чтобы среднее расстояние между ними было значительно больше видимого смещения снежинки за время ее освещения, т.е. $\bar{l} \gg V\tau$, где V – скорость самолета, а τ – время вспышки посадочного огня. Масса снега M , падающего за единицу времени (1 с) на единицу площади земли (1 м^2), выражается через массу снежинки m , скорость ее падения на землю v и количество снежинок в единице объема n следующим образом: $M = nvmt$. Количество снежинок в единице объема определяет среднее расстояние между ними: $\bar{l} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. В то же время из условия известно, что при

плавлении выпавших осадков за час получается слой толщиной d , что соответствует массе снега на единицу площади в единицу времени $M = \rho d$, где ρ – плотность воды. Таким образом, из приведенных рассуждений следует, что $nvmt = \rho d$, $V\tau \ll \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Отсюда $\tau \ll \frac{1}{V} \sqrt[3]{\frac{mv}{\rho d}}$.

Переходя к единицам системы СИ и учитывая, что величина d имеет размерность скорости (мм/час), получаем окончательно $\tau \ll \frac{3,6}{330} \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 3,6 \cdot 10^3}{3,6 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}} \approx 0,002$ с, т.е. время одной вспышки лампы не превышает 0,2 мс.

Поскольку скорость выпадения осадков входит в итоговое выражение под корнем третьей степени, то при изменении этого параметра в 10 раз оценка времени вспышки изменится лишь в $\sqrt[3]{10} \approx 2$ раза (при уменьшении интенсивности снегопада в 10 раз оценка увеличится в 2 раза и составит 0,4 мс).

Таким образом, располагая очень приблизительными сведениями о снегопаде и достаточно точной информацией о посадочной скорости самолета (которая известна из справочных данных с погрешностью примерно 20%), можно дать весьма достоверную оценку длительности вспышки бортового огня.

Ответ. $\tau \approx 0,2$ мс, $\tau_1 \approx 0,4$ мс.

I.11. Определим, в каких процессах теплоемкость газа постоянна, а график зависимости давления газа от объема представляет собой отрезок прямой линии. Согласно первому закону термодинамики $\Delta Q = \Delta U + A$, где ΔQ – количество теплоты, сообщенное газу, ΔU – изменение его внутренней энергии, $A = p\Delta V$ – совершенная газом работа, p – давление, ΔV – изменение объема газа. Для одного моля идеального одноатомного газа $U = \frac{3}{2}RT = \frac{3}{2}pV$ и $\Delta U = \frac{3}{2}(p\Delta V + V\Delta p)$. Из записанных выражений следует, что $\Delta Q = \frac{5}{2}p\Delta V + \frac{3}{2}V\Delta p$. С другой стороны, $\Delta Q = C\Delta T$, где C – теплоемкость газа, ΔT – приращение его температуры. Поскольку идеальный газ подчиняется уравнению Менделеева–Клапейрона: $pV = RT$, где R – универсальная газовая постоянная, то $\Delta T = \frac{p\Delta V + V\Delta p}{R}$. Таким образом, справедливо равенство

$$\frac{C}{R}(p\Delta V + V\Delta p) = \frac{5}{2}p\Delta V + \frac{3}{2}V\Delta p, \quad \text{или} \quad \left(C - \frac{5}{2}R\right)p\Delta V = \left(\frac{3}{2}R - C\right)V\Delta p.$$
 Рассмотрим следствия из этого равенства. В частности, в изохорном процессе $\Delta V = 0$ и $C = C_V = \frac{3}{2}R$, а в изобарном процессе $\Delta p = 0$ и $C = C_p = \frac{5}{2}R$. Для других процессов с постоянной теплоемкостью по-

лучаем, что $\frac{\Delta p}{p} = \frac{C - 5R/2}{3R/2 - C} \cdot \frac{\Delta V}{V}$, откуда $\ln\left(\frac{p}{p_1}\right) = \frac{2C - 5R}{3R - 2C} \ln\left(\frac{V}{V_1}\right)$, или

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{V}{V_1}\right)^{\frac{2C - 5R}{3R - 2C}},$$
 где p_1 и V_1 – давление и объем газа в некотором со-

стоянии. Зависимость давления газа от объема будет линейной, если показатель степени равен единице, т.е. если $C = 2R$. При этом продолжение прямой, отображающей график процесса на pV -диаграмме, будет проходить через начало координат.

По условию pV -диаграмма цикла представляет собой замкнутую ломаную, состоящую из трех отрезков. Как было установлено выше, это могут быть горизонтальные ($p = \text{const}$) и вертикальные

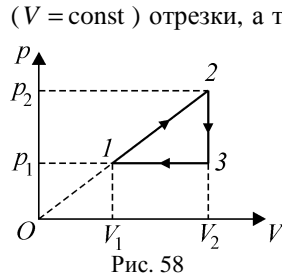


Рис. 58

координат ($p \sim V$). Учитывая, что из всех рассмотренных процессов максимальной теплоемкостью $C_p = \frac{5}{2}R$ обладает изобарный процесс, и что в этом процессе газ по условию сжимается, приходим к выводу, что pV -диаграмма цикла должна иметь вид, изображенный на рис. 58. КПД цикла равен отношению

работы, совершенной газом, к количеству теплоты, полученному от нагревателя в процессе $1-2$, т.е. $\eta = \frac{A}{Q_{12}}$. Имеем: $A = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$,

$Q_{12} = 2R(T_2 - T_1) = 2(p_2V_2 - p_1V_1)$. Учитывая, что по условию

$\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_2}{V_1} = k$, после несложных преобразований находим $\eta = \frac{k-1}{4(k+1)}$.

Ответ. $\eta = \frac{k-1}{4(k+1)}$.

I.12. По второму закону Ньютона уравнение движения электрона в пространстве между пластинами конденсатора имеет вид: $m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_K + \vec{F}_L$, где m – масса электрона, $\dot{\vec{v}}$ – его ускорение (точкой обозначена производная скорости \vec{v} по времени), $\vec{F}_K = -e\vec{E}$ – кулоновская сила, e – модуль заряда электрона, \vec{E} – напряженность электрического

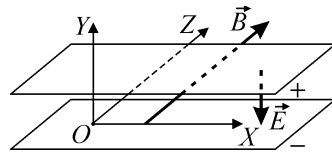


Рис. 59

поля в конденсаторе, $\vec{F}_L = -e[\vec{v}, \vec{B}]$ – сила Лоренца (квадратные скобки означают векторное произведение). Совместим начало координат неподвижной системы отсчета с местом появления электрона на поверхности пластины, а координатные

оси направим, как показано на рис. 59. Поскольку скорость электрона при выходе из пластины по условию пренебрежимо мала, его последующее движение происходит в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{B} , т.е. в плоскости XOY . Разложим скорость электрона на составляющие \vec{v}_x (вдоль оси OX) и \vec{v}_y (вдоль оси OY): $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$ (рис. 60). То-

гда сила Лоренца может быть представлена в виде:
 $\vec{F}_{Л} = -e[\vec{v}_x, \vec{B}] - e[\vec{v}_y, \vec{B}]$. Применяя для определения направления составляющих силы Лоренца вдоль координатных осей правило буравчика, находим, что $\vec{F}_{Лx} = -e[\vec{v}_y, \vec{B}]$, $\vec{F}_{Лy} = -e[\vec{v}_x, \vec{B}]$. В проекциях на координатные оси уравнения движения электрона имеют вид:

$$m\dot{v}_x = ev_y B, \quad m\dot{v}_y = eE - ev_x B.$$

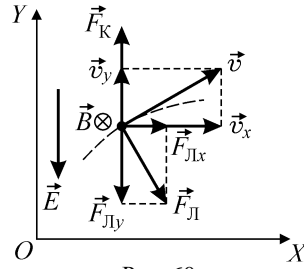


Рис. 60

Начальные условия, т.е. значения координат и проекций скорости электрона при $t=0$ по условию, а также в силу выбора координатной системы, таковы: $x = y = 0$, $v_x = v_y = 0$. Из первого уравнения с учетом начальных условий находим, что $v_x = \gamma B y$. Подстановка этого выражения во второе уравнение дает: $\dot{v}_y = \gamma E - (\gamma B)^2 y$. Принимая во внимание, что $\dot{v}_y = \ddot{y}$, получаем уравнение: $\ddot{y} + (\gamma B)^2 y = \gamma E$. Заменой $y = \eta + \frac{E}{\gamma B^2}$ оно приводится к уравнению гармонических колебаний, а именно, $\ddot{\eta} + (\gamma B)^2 \eta = 0$, с начальными условиями: $\eta(0) = -\frac{E}{\gamma B^2}$, $\dot{\eta}(0) = 0$. Решение этого уравнения имеет вид: $\eta = -\frac{E}{\gamma B^2} \cos \gamma B t$. Следовательно,

$$y = \frac{E}{\gamma B^2} (1 - \cos \gamma B t) \quad \text{и} \quad \dot{y} = v_y = \frac{E}{B} \sin \gamma B t.$$

Обратимся вновь к проекции уравнения движения электрона на ось OY , а именно, $\dot{v}_y = \gamma E - \gamma B \dot{x}$. С учетом начального условия $x(0) = 0$ из этого уравнения следует, что $v_y = \gamma E t - \gamma B x$. Отсюда

$x = \frac{E}{B} t - \frac{v_y}{\gamma B} = \frac{E}{B} t - \frac{E}{\gamma B^2} \sin \gamma B t$. Поскольку $E = \frac{U}{d}$, получаем окончательно:

$$x = \frac{U}{\gamma d B^2} (\gamma B t - \sin \gamma B t), \quad y = \frac{U}{\gamma d B^2} (1 - \cos \gamma B t).$$

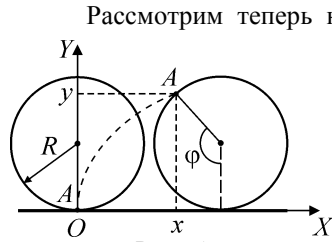


Рис. 61

Рассмотрим теперь колесо радиуса R , катящееся по горизонтальной дороге без проскальзывания (рис. 61). Пусть точка A , расположенная на ободе колеса, первоначально находилась в начале координат. Тогда при повороте колеса на угол φ его центр переместится на расстояние $R\varphi$, а координаты точки A определяются по формулам: $x = R(\varphi - \sin \varphi)$, $y = R(1 - \cos \varphi)$. Учитывая, что при равномерном качении колеса угол поворота φ связан с угловой скоростью вращения колеса ω соотношением $\varphi = \omega t$, получаем

$$x = R(\omega t - \sin \omega t), \quad y = R(1 - \cos \omega t).$$

Сравнивая эти формулы с полученными выше зависимостями координат электрона от времени, находим $R = \frac{U}{\gamma dB^2}$, $V = \frac{U}{dB}$.

Ответ. $R = \frac{U}{\gamma dB^2}$; $V = \frac{U}{dB}$.

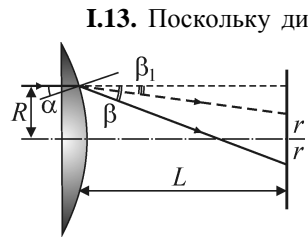


Рис. 62

I.13. Поскольку диаметр светлого пятна на экране меньше диаметра падающего на линзу пучка, то линза является собирающей. Ход одного из лучей, ограничивающего пучок, изображен на рис. 62 сплошной линией до погружения линзы и экрана в жидкость и штриховой линией после погружения. Используя обозначения, приведенные на рисунке, с учетом малости углов β и β_1 имеем $R + r = L\beta$, $R - r = L\beta_1$. Согласно закону Снеллиуса, для малых углов падения и преломления справедливы равенства $\beta = (n - 1)\alpha$, $\beta_1 = \left(\frac{n}{n_1} - 1\right)\alpha$. По

условию задачи $\frac{R}{r} = k$. Исключая из записанных уравнений R , L и α , находим $n = \frac{2n_1}{1 + k + (1 - k)n_1}$.

Ответ. $n = \frac{2n_1}{1 + k + (1 - k)n_1}$.

II. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

II.1. Обозначим через V_1 и V_2 объемы золота и меди в изделии. По условию объем изделия $V = V_1 + V_2$. Масса тела, его плотность и объем связаны соотношением $m = \rho V$. Следовательно, $\frac{m}{\rho} = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}$. Так как масса изделия равна сумме масс золота и меди: $m = m_1 + m_2$, то $\frac{m}{\rho} = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m - m_1}{\rho_2}$. Отсюда $m_1 = m \frac{\rho_1(\rho - \rho_2)}{\rho(\rho_1 - \rho_2)}$.

Ответ. $m_1 = m \frac{\rho_1(\rho - \rho_2)}{\rho(\rho_1 - \rho_2)} \approx 1,4$ кг.

II.2. При поворачивании кубика через ребро положительная работа A_1 равна увеличению $\Delta E_{\text{п}}$ потенциальной энергии взаимодействия кубика с Землей $A_1 = \Delta E_{\text{п}}$ (рис. 63). Учитывая, что потенциальная энергия твердого тела определяется высотой его центра тяжести, который для однородного кубика совпадает с его центром, находим, что

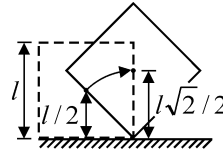


Рис. 63

$A_1 = mg \left(\frac{l\sqrt{2}}{2} - \frac{l}{2} \right)$, где l – длина ребра кубика, а m – его масса. При поступательном перемещении кубика минимальная работа равна $A_2 = \mu mgl$. Поэтому $n = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2\mu}$.

Ответ. $n = \frac{\sqrt{2} - 1}{2\mu}$.

II.3. Изменение внутренней энергии идеального одноатомного газа определяется формулой $\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T$, где ΔT – приращение его температуры. Работа, совершенная газом в изобарном процессе, $A = p \Delta V = \nu R \Delta T$. Следовательно, $\Delta U = \frac{3}{2} A$. Изменение средней

кинетической энергии одной молекулы $\Delta E = \frac{\Delta U}{N}$, где $N = \nu N_A$ – число молекул газа. Таким образом, $\Delta E = \frac{3}{2} \cdot \frac{A}{\nu N_A} \approx 1,5 \cdot 10^{-22}$ Дж.

Ответ. $\Delta E = \frac{3}{2} \cdot \frac{A}{\nu N_A} \approx 1,5 \cdot 10^{-22}$ Дж.

П.4. Соединив параллельно k групп, каждая из которых состоит из $m = \frac{N}{k}$ соединённых последовательно источников, ученик получил батарею с ЭДС $\mathcal{E}_N = \frac{N\mathcal{E}}{k}$ и внутренним сопротивлением $r_N = \frac{Nr}{k^2}$. Сила

тока через резистор при этом равна $I = \frac{N\mathcal{E}}{k(R + Nr/k^2)}$. Для нахождения максимума этого выражения вычислим его производную по k , а именно $I' = -\frac{R - Nr/k^2}{k^2(R + Nr/k^2)^2}$, и приравняем ее нулю. В результате находим,

что ток через резистор максимален при $\frac{Nr}{k^2} = R$, т.е. при $r_N = R$. Следова-

тельно, $I_{\max} = \frac{1}{2} \mathcal{E} \sqrt{\frac{N}{Rr}}$.

Ответ. $I_{\max} = \frac{1}{2} \mathcal{E} \sqrt{\frac{N}{Rr}} = 10$ А.

П.5. Прямое уменьшенное изображение предмета получается только с помощью рассеивающей линзы. Соответствующее построение

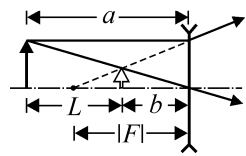


Рис. 64

приведено на рис. 64. Формула тонкой линзы с учетом того, что изображение мнимое, имеет вид $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F} = D$. По условию $a = nb$, $a - b = L$.

Отсюда $D = -\frac{(n-1)^2}{nL}$.

Ответ. $D = -\frac{(n-1)^2}{nL} \approx -3,33$ дптр.

ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА «ШАГ В ФИЗИКУ – 2011»

Задание для 7-го класса

7.1. Минимальное время поездки связного в хвост колонны $t_1 = \frac{2}{14+6} = 0,1$ ч = 6 мин, а минимальное время поездки обратно $t_2 = \frac{2}{14-6} = 0,25$ ч = 15 мин. Полное минимальное время равно $t_1 + t_2 = 6 + 15 = 21$ мин.

Ответ. 21 мин.

7.2. Т.к. время поездки равно $\tau = 0,5 + 1 + 6/16 = 2$ ч, а пройденный всадником путь $L = 5 + 10 + 6 = 21$ км, то искомая скорость $v = L/\tau = 10,5$ км/ч.

Ответ. 10,5 км/ч.

7.3. Вместимость бутылки $V = (960 - 460)/1 = 500$ см³. Плотность масла $\rho_m = (920 - 460)/500 = 0,92$ г/см³ = 920 кг/м³.

Ответ. 920 кг/м³.

7.4. Объем материала уменьшенной копии башни меньше объема материала самой башни в $k = (300/0,3)^3 = 10^9$ раз. Т.к. плотность материала копии в 2,4 раза меньше плотности стали, то искомая масса равна $7,2 \cdot 10^6 / (2,4 \cdot 10^9) = 3 \cdot 10^{-3}$ кг = 3 г.

Ответ. 3 г.

7.5. Пусть m – начальная масса льда, ρ_v – плотность воды. Условие плавления льда, согласно закону Архимеда, имеет вид: $mg = \rho_v Vg$.

Отсюда объем, вытесненный плавающим льдом, $V = \frac{m}{\rho_v}$. Когда весь лед

растает, образовавшаяся из него вода будет занимать такой же объем. Следовательно, высота уровня воды не изменится.

Ответ. Уровень воды не изменится.

Задание для 8-го класса

8.1. Пусть M – масса куба, m – масса камня, $\rho_{\text{в}}$ – плотность воды, a – длина ребра куба, h – глубина первоначального погружения куба. Условия плавания куба имеют вид: $Mg = \rho_{\text{в}} a^2 h g$ (без камня), $(m + M)g = \rho_{\text{в}} a^2 (h + \Delta h)g$ (с камнем). Отсюда $m = \rho_{\text{в}} a^2 \Delta h = 20$ кг.

Плотность камня $\rho = \frac{20}{10^{-2}} = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 2 \text{ г/см}^3$

Ответ. 2 г/см³.

8.2. Пусть $l_{\text{л}}$ и $l_{\text{п}}$ – длины левой и правой частей коромысла весов, m – масса тела. Поскольку в отсутствии тела и гирь на чашках весов, они находятся в равновесии, то из условия задачи следуют равенства: $mg l_{\text{п}} = 25 l_{\text{л}}$, $mg l_{\text{л}} = 36 l_{\text{п}}$. Отсюда $m^2 = 25 \cdot 36 / 10^2 = 9 \text{ кг}^2$ и $m = 3$ кг.

Ответ. 3 кг.

8.3. Пусть h_0 – высота начального уровня ртути в сосудах. После того, как нальют воду, уровень ртути в левом сосуде опустится на Δh_1 , в правом – опустится на Δh_2 , а в среднем – повысится на $\Delta h_1 + \Delta h_2$. Жидкости будут находиться в равновесии при равенстве давлений ртути на уровне трубки, соединяющей сосуды: $\rho_{\text{в}} h_1 g + \rho_{\text{рт}} (h_0 - \Delta h_1) g = \rho_{\text{рт}} (h_0 + \Delta h_1 + \Delta h_2) g$, $\rho_{\text{рт}} (h_0 + \Delta h_1 + \Delta h_2) g = \rho_{\text{в}} h_2 g + \rho_{\text{рт}} (h_0 - \Delta h_2) g$. Из этих равенств, следует, что $\rho_{\text{в}} h_1 = \rho_{\text{рт}} (2\Delta h_1 + \Delta h_2)$, $\rho_{\text{в}} h_2 = \rho_{\text{рт}} (\Delta h_1 + 2\Delta h_2)$, или $\rho_{\text{в}} (h_1 + h_2) = 3\rho_{\text{рт}} (\Delta h_1 + \Delta h_2)$. Учитывая, что

$\Delta h_1 + \Delta h_2 = \Delta h$, получаем ответ: $\Delta h = \frac{\rho_{\text{в}}}{3\rho_{\text{рт}}} (h_1 + h_2) = 5$ мм.

Ответ. 5 мм

8.4. Пусть искомая масса воды (в граммах) равна $m_{\text{в}}$. Так как в конечном состоянии в калориметре остался нерастаявший лед, то температура содержимого калориметра должна стать равной 0 °С. Поэтому, согласно условию задачи, уравнение теплового баланса имеет вид:

$4,2 \cdot m_{\text{в}} \cdot 50 = 2,1 \cdot 40 \cdot 10 + (40 - 19) \cdot 330$. Отсюда $m_{\text{в}} = \frac{840 + 6930}{210} = 37$ г.

Ответ. 37 г.

8.5. Пусть искомая масса пара (в килограммах) равна m . Тогда, согласно условию задачи, уравнение теплового баланса будет иметь вид: $m \cdot [2300 + 4,2 \cdot (100 - 80)] = 5 \cdot 330 + (5 + 11,5) \cdot 4,2 \cdot 80$. Отсюда $m = 7194 / 2384 \approx 3,02$ кг.

Ответ. 3 кг.

Задание для 9-го класса

9.1. Для длин отрезков l_1 и l_2 справедливы уравнения $l_1 = v_1 t_1 + \frac{at_1^2}{2}$, $l_2 = v_2 t_2 + \frac{at_2^2}{2}$, где v_1 и v_2 – модули начальных скоростей автомобиля при прохождении соответствующих участков, причем $v_2 = v_1 + at_1$, где a – ускорение автомобиля. Исключая v_1 и v_2 из записанных уравнений, получаем $a = \frac{2(l_2 t_1 - l_1 t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 1 \text{ м/с}^2$.

Ответ. $a = \frac{2(l_2 t_1 - l_1 t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 1 \text{ м/с}^2$.

9.2. Изменение импульса шарика при ударе о наклонную плоскость равно $\Delta \vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$, где \vec{p}_0 – импульс шарика непосредственно перед ударом, \vec{p}_1 – его импульс сразу после удара (рис. 65). При абсолютно упругом ударе модуль импульса не изменяется, а угол падения равен углу отражения. Это обеспечивает приведенное на рисунке соотношение углов, где $\beta = \pi/2 - \alpha$. Из рисунка видно, что $\Delta p = 2p_0 \sin \beta = 2p_0 \cos \alpha$. Учитывая, что $p_0 = mv_0$,

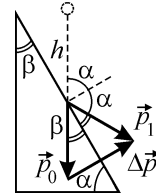


Рис. 65

где v_0 – скорость шарика перед ударом, находим $v_0 = \frac{\Delta p}{2m \cos \alpha}$. По закону сохранения механической энергии, примененному для свободного падения шарика с высоты h , следует, что $mgh = \frac{mv_0^2}{2}$. Из записанных

выражений получаем $h = \frac{(\Delta p)^2}{8gm^2 \cos^2 \alpha} = 0,8 \text{ м} = 80 \text{ см}$.

Ответ. $h = \frac{(\Delta p)^2}{8gm^2 \cos^2 \alpha} = 80 \text{ см}$.

9.3. Обозначим через $C_{\text{в}}$ и $C_{\text{ш}}$ теплоемкости стакана с водой и шарика, соответственно. Уравнения теплового баланса для двух процессов теплообмена имеют вид:

$$C_{\text{в}}(t_1 - t_2) = C_{\text{ш}}(t_2 - t_0) \quad (\text{когда положили первый шарик}),$$

$$C_{\text{в}}(t_2 - t_3) + C_{\text{ш}}(t_2 - t_3) = C_{\text{ш}}(t_3 - t_0) \quad (\text{когда положили второй шарик}).$$

Исключая из этих соотношений $C_{\text{в}}$ и $C_{\text{ш}}$, получаем, что

$$t_3 = \frac{t_2(t_1 - t_0) + t_0(t_1 - t_2)}{2t_1 - t_2 - t_0} = 50^\circ\text{C}.$$

Ответ. $t_3 = \frac{t_2(t_1 - t_0) + t_0(t_1 - t_2)}{2t_1 - t_2 - t_0} = 50^\circ\text{C}.$

9.4. Обозначим через \mathcal{E} ЭДС батарейки, через r – сумму внутренних сопротивлений батарейки и амперметра, а через R – внутреннее сопротивление вольтметра. Согласно закону Ома для замкнутой цепи, сила тока, текущего через источник, в рассматриваемых в задаче случаях равна: $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$, $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r + R/2}$, $I_3 = \frac{\mathcal{E}}{r}$. Показания вольтметра в

первом и втором случаях равны $U_1 = I_1 R = \frac{\mathcal{E}R}{r + R}$, $U_2 = I_2 \frac{R}{2} = \frac{\mathcal{E}R}{2r + R}$.

Из этих соотношений следует, что $\frac{R}{r} = \frac{2U_2 - U_1}{U_1 - U_2} = \frac{U_2}{U_1 - U_2} - 1$. Учיתי-

вая, что искомое отношение показаний амперметра $n = \frac{I_3}{I_1} = 1 + \frac{R}{r}$, на-

ходим, что $n = \frac{U_2}{U_1 - U_2} = 7$.

Ответ. $n = \frac{U_2}{U_1 - U_2} = 7$.

9.5. Обозначим через α угол падения светового пучка на границу раздела жидкости и воздуха. Из рис. бб видно, что такой же угол образует с вертикалью скорость \vec{v} , с которой движутся частицы жидкости в

струе в точке падения пучка. Имеем: $\sin \alpha = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$, где $v_x = v_0$,

$v_y = \sqrt{gd}$. Отсюда $\sin \alpha = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + gd}}$. С другой стороны, пучок выйдет

из жидкости в воздух, если он не испытает полного внутреннего отражения, т.е. если $\sin \alpha \leq \frac{1}{n}$. Объединяя за-

писанные выражения, находим, что

$$v_0 \leq \sqrt{\frac{gd}{n^2 - 1}} = 0,5 \text{ м/с} = 50 \text{ см/с}.$$

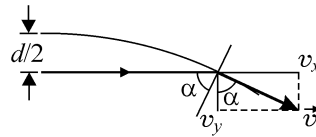


Рис. 66

Ответ. $v_0 \leq \sqrt{\frac{gd}{n^2 - 1}} = 50 \text{ см/с}.$

Задание для 10-го класса

10.1. Пусть v_0 – модуль скорости первого шарика непосредственно перед соударением со вторым шариком, v_1 и v_2 – горизонтальные проекции скоростей шариков сразу после соударения. Из законов сохранения энергии и импульса вытекают равенства:

$$\frac{m_1 v_0^2}{2} = m_1 g l_1 (1 - \cos \alpha), \quad m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad \frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = m_1 g h_1. \quad \text{Из этих равенств следует, что } \cos \alpha = 1 - \frac{v_0^2}{2 g l_1},$$

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0, \quad v_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_0. \quad \text{Учитывая, что } \frac{m_2}{m_1} = n, \quad \text{находим}$$

$$v_0^2 = 2 g h_1 \left(1 + \frac{4 n}{(n-1)^2} \right).$$

Ответ. $\cos \alpha = 1 - \frac{h_1 (n+1)^2}{l_1 (n-1)^2} = 0,5, \quad \alpha = 60^\circ.$

10.2. Давление влажного воздуха в цилиндре складывается из парциальных давлений сухого воздуха и паров воды: $p = p_{\text{в}} + p_{\text{п}}$, причем $p_{\text{п}} = \phi p_{\text{нп}}$. Давление насыщенных паров воды $p_{\text{нп}}$ при температуре кипения $t = 100^\circ \text{C}$ равно нормальному атмосферному давлению, т.е.

$p_{\text{нп}} = p_0$. Так как поршень невесом, в начальном состоянии давление в цилиндре равно атмосферному давлению p_0 . Поэтому исходные парциальные давления сухого воздуха и паров воды равны соответственно $p_{\text{в}} = (1 - \varphi)p_0$ и $p_{\text{п}} = \varphi p_0$. Для того чтобы выступила роса, необходимо увеличить парциальное давление паров воды до величины p_0 , чего можно добиться, уменьшив объем паров в $\frac{1}{\varphi}$ раз. По закону Бойля-Мариотта во столько же раз должно возрасти давление влажного воздуха в цилиндре. Из условия равновесия поршня в конечном состоянии следует равенство $p_0 + \frac{mg}{S} = \frac{p_0}{\varphi}$. Отсюда $m = \frac{1 - \varphi}{\varphi g} Sp_0 = 400$ кг.

Ответ. $m = \frac{100\% - \varphi}{\varphi g} Sp_0 = 400$ кг.

10.3. Поскольку резистор R_1 , первая батарея и вторая батарея

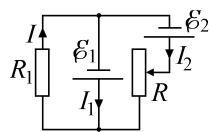


Рис. 67

вместе с реостатом R соединены параллельно, падения напряжения на резисторе R_1 , первой батарее и второй батарее с реостатом должны быть одинаковыми. Пусть сумма внутреннего сопротивления второй батареи и включенной в схему части реостата равна r_2 . Используя для токов в цепи обозначения,

приведенные на рис. 67, имеем: $IR_1 = \mathcal{E}_1 - I_1 r = \mathcal{E}_2 - I_2 r_2$. Отсюда $I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - IR_1}{r}$, $I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - IR_1}{r_2}$. По первому правилу Кирхгофа $I = I_1 + I_2$.

Следовательно, сила тока через резистор R_1 должна удовлетворять уравнению $I = \frac{\mathcal{E}_1 - IR_1}{r} + \frac{\mathcal{E}_2 - IR_1}{r_2}$. Это уравнение обратится в тождество при

любых r_2 , если $\mathcal{E}_2 = IR_1$ (т.е. $I_2 = 0$), $\mathcal{E}_1 = I(R_1 + r)$.

Ответ. $\mathcal{E}_1 = I(R_1 + r) = 200$ В, $\mathcal{E}_2 = IR_1 = 150$ В.

10.4. Под действием постоянного электрического поля заряженный шарик летит по параболической траектории, а траектория незаряженного шарика представляет собой два прямолинейных отрезка равной длины. В направлении, параллельном пластинам, оба шарика летят с

одинаковыми постоянными скоростями. Поскольку по условию шарики возвращаются в одну и ту же точку первой пластины, они затрачивают на движение одно и то же время. Обозначив через d расстояние между пластинами, находим, что время движения незаряженного шарика от одной пластины до другой, $t_0 = \frac{d}{v_{0y}}$, где $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$. Такое же время заряженный шарик движется от момента вылета до достижения вершины параболы. Модуль ускорения заряженного шарика $a = \frac{v_{0y}}{t_0} = \frac{v_{0y}^2}{d}$, а его перемещение в направлении, перпендикулярном пластинам, за время t_0 составляет $y_{\max} = v_{0y}t_0 - \frac{at_0^2}{2} = \frac{d}{2}$. Таким образом, заряженный шарик в направлении, перпендикулярном пластинам, долетает ровно до середины конденсатора. При этом он проходит разность потенциалов $\Delta\phi = \frac{U}{2}$. Из закона сохранения механической энергии для заряженного шарика $\frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2} = \frac{qU}{2}$ находим, что $m = \frac{qU}{v_0^2 \sin^2 \alpha} \approx 1,33$ мг.

Ответ. $m = \frac{qU}{v_0^2 \sin^2 \alpha} \approx 1,33$ мг

10.5. В рассеянном свете присутствуют лучи, падающие на экран под всевозможными углами. Рассмотрим падающий в отверстие луч, угол падения которого равен 90° (рис. 68). Угол преломления данного луча на границе с жидкостью удовлетворяет условию $\sin \alpha = \frac{1}{n}$. Этот угол ограничивает расходящийся конус лучей света в жидкости. При отражении от зеркала на дне угол раствора конуса не изменяется, по-

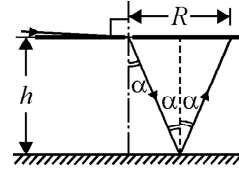


Рис. 68

этому $R = 2h \operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{\sqrt{n^2 - 1}} = 20$ см.

Ответ. $R = \frac{2h}{\sqrt{n^2 - 1}} = 20$ см.

Задание для 11-го класса

11.1. Пусть a – модуль ускорения кабины при разгоне и замедлении, а v_0 – модуль скорости ее равномерного движения, причем $a\tau_1 = v_0$. Сила натяжения троса была равна: при разгоне кабины: $T_{\max} = m(g + a)$, при равномерном движении: $T_0 = mg$, при замедлении кабины: $T_{\min} = m(g - a)$. Здесь m – масса кабины. Работа по подъему кабины равна $A = mgH$. Из условий движения кабины вытекает, что

$$H = \frac{a\tau_1^2}{2} + v_0(\tau - 2\tau_1) + v_0\tau_1 - \frac{a\tau_1^2}{2} = v_0(\tau - \tau_1). \quad \text{Поэтому} \quad v_0 = \frac{H}{(\tau - \tau_1)}.$$

Максимальная мощность развивается двигателем в конце участка разгона: $N_{\max} = m(g + a)v_0 = m\left(g + \frac{v_0}{\tau_1}\right)v_0$. Отсюда $m = \frac{N_{\max}}{v_0(g + v_0/\tau_1)}$.

Объединяя записанные выражения, получаем, что

$$A = \frac{gN_{\max}\tau_1(\tau - \tau_1)^2}{g\tau_1(\tau - \tau_1) + H} = 96000 \text{ Дж.}$$

Ответ. $A = \frac{gN_{\max}\tau_1(\tau - \tau_1)^2}{g\tau_1(\tau - \tau_1) + H} = 96 \text{ кДж.}$

11.2. Работа газа в циклическом процессе (рис. 69) равна алгебраической сумме количеств теплоты, которыми газ обменивается с нагревателем и холодильником: $A = Q_{1-2} + Q_{2-3}$.

Газ получает от нагревателя количество теплоты Q_{1-2} . Следовательно, КПД двигателя

$$\eta = \frac{A}{Q_{1-2}} = 1 + \frac{Q_{2-3}}{Q_{1-2}}, \quad \text{где} \quad Q_{1-2} = \frac{5}{2}\nu R(T_2 - T_1),$$

$$Q_{2-3} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2). \quad \text{Из уравнений изобарного}$$

(1 – 2) и изохорного (2 – 3) процессов следуют равенства $\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} = k$,

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{p_2}{p_3} = n. \quad \text{Отсюда} \quad T_1 = \frac{T_2}{k}, \quad T_3 = \frac{T_2}{n}. \quad \text{Подставляя записанные соотно-$$

шения в выражение для КПД, получаем, что

$$\eta = \left(1 - \frac{3k(n-1)}{5n(k-1)}\right) \cdot 100\% \approx 21,7\% .$$

Ответ. $\eta = \left(1 - \frac{3k(n-1)}{5n(k-1)}\right) \cdot 100\% \approx 21,7\% .$

11.3. Скорость движения нити в момент времени t равна $v(t) = \dot{x}(t) = \frac{\alpha}{2\sqrt{t}}$, где точкой обозначена производная по времени. Число витков, намотанных на цилиндр в этот момент, $N(t) = \frac{x}{2\pi r} = \frac{\alpha\sqrt{t}}{2\pi r}$.

Сила тока, протекающего в одном витке, $I(t) = \frac{Q}{L}v(t) = \frac{Q\alpha}{2L\sqrt{t}}$. Магнитная индукция на оси длинного соленоида вдали от его концов равна $B = \mu_0 \frac{N}{l}I$. Объединяя записанные выражения, находим $B = \mu_0 \frac{Q\alpha^2}{4\pi r l L}$.

Ответ. $B = \mu_0 \frac{Q\alpha^2}{4\pi r l L}$.

11.4. Рассмотрим момент времени, когда напряжение на катушке равно U . Обозначим через I_L , I_R , и I_r силы токов, текущих в этот момент через катушку, резистор и источник, соответственно. По закону электромагнитной индукции $U = L \frac{\Delta I_L}{\Delta t}$, где ΔI_L – изменение за малое время Δt силы тока, текущего через катушку. По закону Ома для однородного участка цепи напряжение на резисторе $U = I_R R$. По закону Ома для участка цепи, содержащего ЭДС, $U = \mathcal{E} - I_r r$. Поскольку согласно первому правилу Кирхгофа $I_r = I_L + I_R$, из последнего равенства можно исключить переменную I_r , переписав это равенство в виде:

$$U = \mathcal{E} - \left(I_L + \frac{U}{R}\right)r .$$

Кроме того, из записанных выше уравнений следует, что $L\Delta I_L = RI_R\Delta t = R\Delta q$, где $\Delta q = I_R\Delta t$ – заряд, протекший через резистор R за время Δt . Так как до замыкания ключа ток через

катушку отсутствовал, а к рассматриваемому моменту времени стал равным I_L , то $LI_L = Rq$. Выражая отсюда величину I_L и подставляя ее в записанное выше соотношение для U , получим уравнение:

$$U = \mathcal{E} - \left(\frac{Rq}{L} + \frac{U}{R} \right) r, \text{ из которого следует, что } U = \frac{R}{R+r} \left(\mathcal{E} - \frac{Rr q}{L} \right) = 4 \text{ В.}$$

Заметим, что решение задачи существует при $q \leq \frac{\mathcal{E}L}{Rr}$, в противном случае решения нет.

Ответ. $U = \frac{R}{R+r} \left(\mathcal{E} - \frac{Rr q}{L} \right) = 4 \text{ В.}$

11.5. В левой части рис. 70 изображено прохождение луча через плоскопараллельную пластинку, где α – угол падения, β – угол преломления. Видно, при прохождении пластинки луч смещается параллельно самому себе расстояние a , которое может быть найдено из равенств:

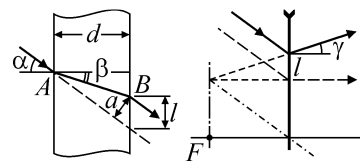


Рис. 70

$AB = \frac{d}{\cos \beta}$ и $AB = \frac{a}{\sin(\alpha - \beta)}$. Отсюда

$$a = d \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}. \text{ В результате такого смещения точка падения луча на}$$

линзу сдвигается от оптической оси линзы на расстояние $l = \frac{a}{\cos \alpha}$. В

правой части рисунка сплошной линией изображено преломление сдвинутого пластинкой луча в линзе. Из рисунка видно, что $\text{tg } \gamma = \frac{l}{F}$. Ис-

пользуя закон преломления $\sin \beta = \frac{1}{n} \sin \alpha$, из записанных выражений

$$\text{получаем, что } \text{tg } \gamma = \frac{d}{F} \left(\text{tg } \alpha - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right) \approx 0,02, \quad \gamma \approx 0,02 \text{ рад} \approx 1,15^\circ.$$

Ответ. $\gamma = \text{arctg} \left[\frac{d}{F} \left(\text{tg } \alpha - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right) \right] \approx 0,02 \text{ рад.} \approx 1,15^\circ.$

ПРОФИЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН 2012

I. Механика

I.1. Брусок и груз движутся под действием сил, изображенных на рис. 71, где Mg и mg – модули сил тяжести, T – модуль силы натяжения нити, N – модуль нормальной составляющей силы реакции наклонной плоскости, $F_{\text{тр}}$ – модуль силы трения скольжения ($F_{\text{тр}} = \mu Mg \cos \alpha$). По второму закону Ньютона имеем $ma = mg - 2T$ (для груза), $Ma' = T - Mg \sin \alpha - \mu Mg \cos \alpha$ (для бруска). Здесь a – ускорение груза, $a' = 2a$ – ускорение бруска. Исключая из этих равенств T находим массу груза $m = \frac{2Mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) + 4Ma}{g - a} \approx 3,26$ кг.

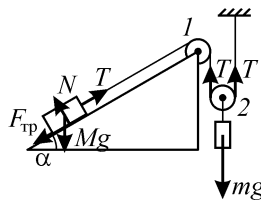


Рис. 71

Ответ. $m = \frac{2Mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) + 4Ma}{g - a} \approx 3,26$ кг.

I.2. Уравнение движения шарика в проекции на направление нити имеет вид $\frac{mv^2}{l} = T - mg \cos \varphi$, где l – длина нити, v – скорость шарика, g – ускорение свободного падения. По закону сохранения энергии $mgh_0 = mgh + \frac{mv^2}{2}$, где $h_0 = l \cdot (1 - \cos \varphi_0)$ – начальная высота шарика, $h = l \cdot (1 - \cos \varphi)$ – его текущая высота. Отсюда $T = mg(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0)$.

Ответ. $T(\varphi) = mg(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0)$.

I.3. Работа переменной силы численно равна площади под кривой, описывающей зависимость силы от перемещения ее точки приложения (рис. 72). По условию модуль силы трения, действующей на боб на участке торможения, зависит от координаты боба по закону $|F_{\text{тр}}(x)| = \alpha x m g$, где m – масса боба. Поскольку сила трения направлена

противоположно перемещению боба, работа этой силы на этапе торможения боба равна $A_{\text{тр}} = -\frac{1}{2}\alpha s^2 mg$. По закону изменения механической энергии имеем

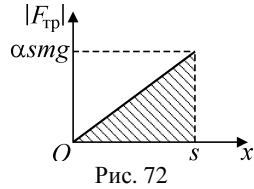


Рис. 72

$\left(\frac{mv_0^2}{2} + mgh\right)(1 - \eta/100\%) - \frac{1}{2}\alpha s^2 mg = 0$. Отсюда

находим, что $\alpha = \frac{(v_0^2 + 2gh)(1 - \eta/100\%)}{gs^2} \approx 0,1 \text{ м}^{-1}$.

Ответ. $\alpha = \frac{(v_0^2 + 2gh)(1 - \eta/100\%)}{gs^2} \approx 0,1 \text{ м}^{-1}$.

II. Молекулярная физика и термодинамика

II.1. Как следует из приведенной диаграммы, в процессах 1–2 и 3–4 давление газа изменяется пропорционально его объему, т.е. $\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}$ и $\frac{p_3}{V_3} = \frac{p_4}{V_4}$. Для изотермических процессов 2–3 и 4–1 имеем $p_2V_2 = p_3V_3$ и $p_4V_4 = p_1V_1$. Объединяя полученные выражения, найдем $V_3 = \frac{V_2V_4}{V_1}$. Учитывая, что $V_4 = 2V_2$, получаем ответ: $V_3 = \frac{2V_2^2}{V_1}$.

Ответ. $V_3 = \frac{2V_2^2}{V_1} = 3,92 \text{ л}$.

II.2. Согласно первому закону термодинамики, $Q = \Delta U + A$, где $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T$ – изменение внутренней энергии газа, ν – количество газа, R – универсальная газовая постоянная, ΔT – изменение температуры газа. Поскольку процесс, совершаемый над газом, является изобарным, то $Q = \frac{5}{2}\nu R\Delta T$. Из записанных выражений следует, что $\Delta U = \frac{3}{5}Q$ и $A = \frac{2}{5}Q$.

Ответ. $A = \frac{2}{5}Q = 40 \text{ Дж}$.

II.3. При изотермическом сжатии насыщенного водяного пара часть Δm его массы конденсируется. Поскольку плотность воды во много раз больше плотности насыщенного пара, объёмом этой воды можно пренебречь и считать, что согласно уравнению Менделеева – Клапейрона, $\Delta m = \frac{p_n V \mu (n-1)}{nRT}$. При этом выделяется количество теплоты $Q = r \Delta m$. При изотермическом сжатии давление пара не изменяется, поэтому совершённая работа равна $A = p_n V \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Согласно первому закону термодинамики искомая величина равна $\Delta U = A - Q$.

Ответ. $\Delta U = p_n V \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{\mu r}{RT}\right) = 0,9 p_n V \left(1 - \frac{\mu r}{RT}\right)$.

III. Электродинамика

III.1. Пусть α – угол, который составляют нити длиной L с вертикалью (рис. 73). Тогда условия равновесия шариков имеют вид $F - T - T \sin \alpha = 0$, $T \cos \alpha - mg = 0$, где T – сила натяжения нити, g – ускорение свободного падения, $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{l^2}$ – сила кулоновского взаимодействия шариков,

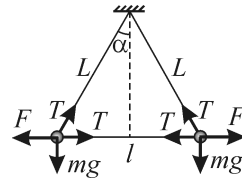


Рис.73

Отсюда $q = 2l \sqrt{\pi\epsilon_0 mg \frac{2L+l}{\sqrt{4L^2 - l^2}}}$.

Ответ. $q = 2l \sqrt{\pi\epsilon_0 mg \frac{2L+l}{\sqrt{4L^2 - l^2}}}$.

III.2. Обозначив через r внутреннее сопротивление источника, запишем мощности, выделяющиеся в нагрузке в первом и во втором случаях, а именно $N_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{(R_1 + r)^2} R_1$, $N_2 = \frac{\mathcal{E}^2}{(R_2 + r)^2} R_2$. По условию $N_1 = N_2$, откуда следует, что $R_1(R_2 + r)^2 = R_2(R_1 + r)^2$, или $\sqrt{R_1}(R_2 + r) = \sqrt{R_2}(R_1 + r)$. Из последнего уравнения легко найти

внутреннее сопротивление источника: $r = \sqrt{R_1 R_2}$. Следовательно,

$$N = \frac{\mathcal{E}^2 R_1}{(R_1 + \sqrt{R_1 R_2})^2} = \frac{\mathcal{E}^2 R_2}{(R_2 + \sqrt{R_1 R_2})^2}.$$

Выражая из одного из этих равенств ЭДС источника \mathcal{E} , получаем, что $\mathcal{E} = \sqrt{N}(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})$.

Ответ. $\mathcal{E} = \sqrt{N}(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}) = 9$ В.

III.3. Т.к. ключ был длительное время замкнут, сила тока через катушку установилась равной $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{r}$, а конденсатор был полностью разряжен. Поэтому в момент размыкания ключа энергия LC -контура была равна $\frac{LI_0^2}{2}$. Пренебрегая потерями в LC -контуре, можно утверждать, что после размыкания в контуре будут происходить гармонические колебания с частотой $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. При этом амплитуда q_0 колебаний

заряда конденсатора определяется из равенства $\frac{q_0^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2}$. Учитывая, что сразу после размыкания направление тока через катушку не изменится, получаем искомую зависимость: $q(t) = -q_0 \sin \omega t$.

Ответ. $q(t) = -\frac{\mathcal{E}\sqrt{LC}}{r} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}$.

IV. Оптика

IV.1. Изображение $A'B'$ отрезка AB располагается на прямой, проходящей через правый фокус линзы и через точку пересечения линии, по которой находится отрезок, с преломляющей плоскостью линзы (см. рис. 74). Из подобия $\triangle FA_1A'$ и $\triangle OCF$ следует, что $\frac{A_1F}{A'F} = \frac{OF}{CF} = \frac{F}{\sqrt{F^2 + d^2}}$,

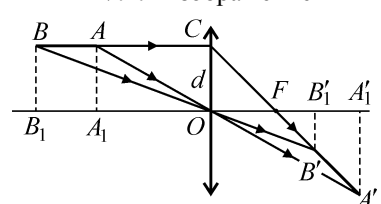


Рис. 74

откуда длина отрезка $A'F = \frac{\sqrt{F^2 + d^2}}{F} A_1'F$. По формуле тонкой линзы имеем: $\frac{1}{A'O} + \frac{1}{A_1'O} = \frac{1}{F}$. Учитывая, что $A'O = a$, $A_1'O = F + A_1'F$, найдем длину отрезка $A'F = \frac{F\sqrt{F^2 + d^2}}{a - F}$. Аналогично получаем, что длина отрезка $B'F = \frac{F\sqrt{F^2 + d^2}}{b - F}$. Поскольку искомая длина равна $l = A'F - B'F$, то $l = F\sqrt{F^2 + d^2} \left(\frac{1}{a - F} - \frac{1}{b - F} \right)$.

Ответ. $l = F\sqrt{F^2 + d^2} \left(\frac{1}{a - F} - \frac{1}{b - F} \right)$.

IV.2. Построение двух изображений предмета, находящегося в двух положениях относительно линзы, показано на рис. 75. При этом учтено, что по условию при отдалении предмета от линзы размер изображения уменьшается. Это возможно только тогда, когда при втором положении предмета его изображение является действительным.

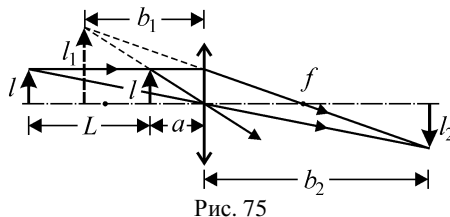
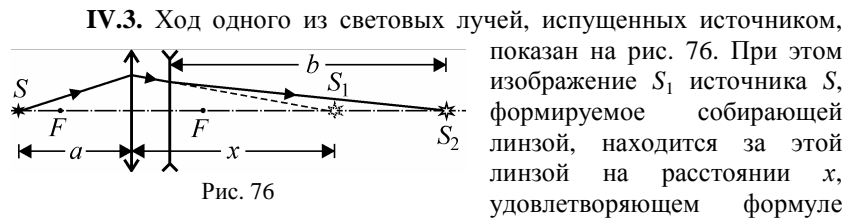


Рис. 75

Из рисунка видно, что $\frac{l_1}{l} = \frac{b_1}{a}$ и $\frac{l_2}{l} = \frac{b_2}{a+L}$. Поскольку $\frac{l_1}{l} = k$ и $\frac{l_2}{l} = \frac{k}{n}$, то $b_1 = ka$ и $b_2 = \frac{k}{n}(a+L)$. Применяя формулу тонкой линзы и учитывая, что при первом положении предмета его изображение является мнимым, имеем: $\frac{1}{a} - \frac{1}{ka} = \frac{1}{f}$,

$\frac{1}{a+L} - \frac{n}{k(a+L)} = \frac{1}{f}$. Из этих соотношений находим, что $f = \frac{kL}{n+1}$.

Ответ. $f = \frac{kL}{n+1} \approx 16,7$ см.



тонкой линзы, а именно $\frac{1}{a} + \frac{1}{x} = \frac{1}{F} = D$. Отсюда $x = \frac{aF}{a-F} = 3F$. Это расстояние превышает на величину $l = x - 0,5F = 2,5F$ расстояние между линзами. Поэтому изображение S_1 является мнимым источником для рассеивающей линзы. Применяя для рассеивающей линзы формулу тонкой линзы $-\frac{1}{l} + \frac{1}{b} = D_1$, находим, что $D_1 = -\frac{1}{5F}$ и $n = \frac{D}{|D_1|} = 5$.

Ответ. $n = 5$.

Учебное издание

**ФИЗИКА. ЗАДАЧИ ПРОФИЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА
И ОЛИМПИАД ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ В МГУ – 2012**

Оригинал-макет: *Чесноков С.С.*

Подписано в печать 19.11.12 г. Формат 60x90 1/16
Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 6,5 п.л.
Тираж 1000 экз. Заказ № 1534.

Физический факультет МГУ
119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова

Типография МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, Ленинские горы