

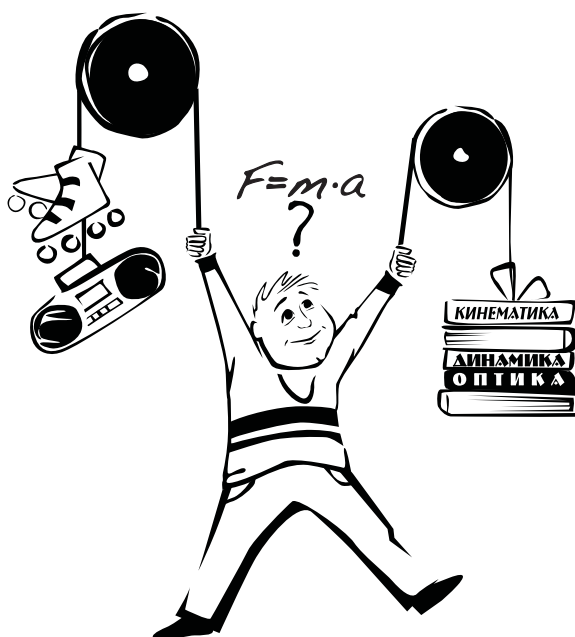


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИКА

ЗАДАЧИ ПРОФИЛЬНОГО
ЭКЗАМЕНА И ОЛИМПИАД
ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ
В МГУ – 2013

(с подробными решениями)



Москва
2013

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

ФИЗИКА
ЗАДАЧИ ПРОФИЛЬНОГО
ЭКЗАМЕНА И ОЛИМПИАД
ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ
В МГУ – 2013
(с подробными решениями)

МАКС ПРЕСС

Москва - 2013

УДК 373:53(076.1)
ББК 22.3я729
Ф51

Коллектив авторов:

*Буханов В.М., Гайдукова И.Ю., Грачев А.В., Зотеев А.В.,
Козлов С.Н., Лукашева Е.В., Невзоров А.Н., Нетребко Н.В.,
Никитин С.Ю., Парфенов К.В., Плотников Г.С., Погожеев В.А.,
Полякова М.С., Поляков П.А., Скипетрова Л.А., Склянкин А.А.,
Чесноков С.С., Чистякова Н.И., Шленов С.А.*

Физика. Задачи профильного экзамена и олимпиад для школьников в МГУ – 2013 (с подробными решениями):

Учебное пособие / Под ред. В.А. Макарова. – М.: МАКС Пресс, 2013. – 92 с.: ил.
ISBN 978-5-317-04644-6

Сборник содержит материалы профильного вступительного экзамена и олимпиад для школьников по физике, проводившихся в МГУ в 2012 – 2013 годах. В начале сборника помещена Программа по физике для поступающих в МГУ. Далее следуют условия задач двух олимпиад по физике, вошедших в Перечень олимпиад школьников на 2012/2013 учебный год, утвержденный Минобразования РФ, а именно, двухтуровой олимпиады «Покори Воробьевы горы – 2013» и двухтуровой олимпиады «Ломоносов – 2012/2013». В конце первой части сборника помещены задания профильного экзамена по физике, проводившегося на физическом факультете МГУ и в его Севастопольском филиале.

Во второй части сборника приведены подробные решения всех задач, содержащие обоснования применимости используемых законов и допущений, а также анализ полученных ответов.

Для учащихся старших классов, абитуриентов, учителей и преподавателей, ведущих занятия по физике со школьниками.

УДК 373:53(076.1)
ББК 22.3я729

ISBN 978-5-317-04644-6

© Физический факультет МГУ
имени М.В. Ломоносова, 2013 г.
© Коллектив авторов, 2013 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Программа вступительных испытаний по физике	4	
	Условия	Решения
Олимпиада «Покори Воробьевы горы – 2013»	15	38
I. Заочный тур	15	38
Задание для 7-х – 9-х классов	15	38
Задание для 10-х – 11-х классов	17	43
II. Очный тур	20	57
Задание для 7-х – 9-х классов	20	57
Задание для 10-х – 11-х классов	21	59
Механика	21	59
Молекулярная физика и термодинамика	22	63
Электродинамика	24	67
Оптика	26	71
Олимпиада «Ломоносов – 2012/2013»	27	74
I. Отборочный этап	27	74
Задание для 7-х – 9-х классов	28	74
Задание для 10-х – 11-х классов	29	76
II. Заключительный этап	31	81
Задание для 7-х – 9-х классов	31	81
Задание для 10-х – 11-х классов	32	82
Профильный экзамен 2013	33	84
I. Механика	34	84
II. Молекулярная физика и термодинамика	35	86
III. Электродинамика	36	88
IV. Оптика	37	89

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ ПО ФИЗИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В МГУ^{*)}

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Настоящая программа составлена на основе ныне действующих учебных программ для школ и классов с углубленным изучением физики.

При подготовке к экзамену основное внимание следует уделить выявлению сущности физических законов и явлений, умению истолковывать физический смысл величин и понятий, а также умению применять теоретический материал к решению задач. Необходимо уметь пользоваться при вычислениях системой СИ и знать внесистемные единицы, указанные в программе.

Глубина ответов на пункты программы определяется содержанием опубликованных учебников для школ и классов с углубленным изучением физики, указанных в конце настоящей программы.

1. МЕХАНИКА

1.1. Кинематика

Механическое движение. Относительность механического движения. Материальная точка. Система отсчета. Траектория. Вектор перемещения и его проекции. Путь.

Скорость. Сложение скоростей.

Ускорение. Сложение ускорений.

Прямолинейное равномерное и равнопеременное движения. Зависимости скорости, координат и пути от времени.

Криволинейное движение. Движение по окружности. Угловая скорость. Период и частота обращения. Ускорение тела при движении по окружности. Тангенциальное и нормальное ускорения.

Свободное падение тел. Ускорение свободно падающего тела. Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Дальность и высота полета.

Поступательное и вращательное движения твердого тела.

^{*)} Программа утверждена на заседании Ученого совета МГУ 8 декабря 2003 г.

1.2. Динамика

Взаимодействие тел. Первый закон Ньютона. Понятие об инерциальных и неинерциальных системах отсчета. Принцип относительности Галилея.

Сила. Силы в механике. Сложение сил, действующих на материальную точку.

Инертность тел. Масса. Плотность.

Второй закон Ньютона. Единицы измерения силы и массы

Третий закон Ньютона.

Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная. Сила тяжести. Зависимость силы тяжести от высоты.

Силы упругости. Понятие о деформациях. Закон Гука. Модуль Юнга.

Силы трения. Сухое трение: трение покоя и трение скольжения. Коэффициент трения. Вязкое трение.

Применение законов Ньютона к поступательному движению тел. Вес тела. Невесомость. Перегрузки.

Применение законов Ньютона к движению материальной точки по окружности. Движение искусственных спутников. Первая космическая скорость.

1.3. Законы сохранения в механике

Импульс (количество движения) материальной точки. Импульс силы. Связь между приращением импульса материальной точки и импульсом силы. Импульс системы материальных точек. Центр масс системы материальных точек. Закон сохранения импульса. Реактивное движение.

Механическая работа. Мощность. Энергия. Единицы измерения работы и мощности.

Кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек. Связь между приращением кинетической энергии тела и работой приложенных к телу сил.

Потенциальная энергия. Потенциальная энергия тел вблизи поверхности Земли. Потенциальная энергия упруго деформированного тела.

Закон сохранения механической энергии.

1.4. Статика твердого тела

Сложение сил, приложенных к твердому телу. Момент силы относительно оси вращения. Правило моментов.

Условия равновесия тела. Центр тяжести тела. Устойчивое, неустойчивое и безразличное равновесия тел.

1.5. Механика жидкостей и газов

Давление. Единицы измерения давления: паскаль, мм рт. ст.

Закон Паскаля. Гидравлический пресс. Давление жидкости на дно и стенки сосуда. Сообщающиеся сосуды.

Атмосферное давление. Опыт Торричелли. Изменение атмосферного давления с высотой.

Закон Архимеда для тел, находящихся в жидкости или газе. Плавание тел.

Движение жидкостей. Уравнение Бернулли.

1.6. Механические колебания и волны. Звук

Понятие о колебательном движении. Период и частота колебаний.

Гармонические колебания. Смещение, амплитуда и фаза при гармонических колебаниях.

Свободные колебания. Колебания груза на пружине. Математический маятник. Периоды их колебаний. Превращения энергии при гармонических колебаниях. Затухающие колебания.

Вынужденные колебания. Резонанс.

Понятие о волновых процессах. Поперечные и продольные волны. Длина волны. Скорость распространения волн. Фронт волны. Уравнение бегущей волны. Стоячие волны.

Интерференция волн. Принцип Гюйгенса. Дифракция волн.

Звуковые волны. Скорость звука. Громкость и высота звука.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

2.1. Основы молекулярно-кинетической теории

Основные положения молекулярно-кинетической теории и их опытное обоснование. Броуновское движение. Масса и размер молекул. Моль вещества. Постоянная Авогадро. Характер движения молекул в газах, жидкостях и твердых телах.

Тепловое равновесие. Температура и ее физический смысл. Шкала температур Цельсия.

Идеальный газ. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа. Средняя кинетическая энергия молекул и температура. Постоянная Больцмана. Абсолютная температурная шкала.

Уравнение Клапейрона-Менделеева (уравнение состояния идеального газа). Универсальная газовая постоянная. Изотермический, изохорный и изобарный процессы.

2.2. Элементы термодинамики

Термодинамическая система. Внутренняя энергия системы. Количество теплоты и работа как меры изменения внутренней энергии. Теплоемкость тела. Понятие об адиабатическом процессе. Первый закон термодинамики. Применение первого закона термодинамики к изотермическому, изохорному и изобарному процессам. Расчет работы

газа с помощью pV -диаграмм. Теплоемкость одноатомного идеального газа при изохорном и изобарном процессах.

Необратимость процессов в природе. Второй закон термодинамики. Физические основы работы тепловых двигателей. КПД теплового двигателя и его максимальное значение.

2.3. Изменение агрегатного состояния вещества

Парообразование. Испарение, кипение. Удельная теплота парообразования. Насыщенный пар. Зависимость давления и плотности насыщенного пара от температуры. Зависимость температуры кипения от давления. Критическая температура.

Влажность. Относительная влажность.

Кристаллическое и аморфное состояние вещества. Удельная теплота плавления.

Уравнение теплового баланса.

2.4. Поверхностное натяжение в жидкостях

Сила поверхностного натяжения. Явления смачивания и несмачивания. Давление под искривленной поверхностью жидкости. Капиллярные явления.

2.5. Тепловое расширение твердых тел и жидкостей

Тепловое линейное расширение. Тепловое объемное расширение. Тепловое расширение жидкостей. Особенности теплового расширения воды.

3. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

3.1. Электростатика

Электрические заряды. Элементарный электрический заряд. Проводники и диэлектрики. Закон сохранения электрического заряда.

Взаимодействие электрически заряженных тел. Электроскоп. Точечный заряд. Закон Кулона.

Электрическое поле. Напряженность электрического поля. Линии напряженности электрического поля (силовые линии). Однородное электрическое поле. Напряженность электростатического поля точечного заряда. Принцип суперпозиции полей. Теорема Гаусса. Поле равномерно заряженных плоскости, сферы и шара.

Работа сил электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Связь разности потенциалов с напряженностью электростатического поля. Потенциал поля точечного заряда. Эквипотенциальные поверхности.

Проводники и диэлектрики в электростатическом поле. Диэлектрическая проницаемость вещества. Электроемкость. Конденсаторы. Поле плоского конденсатора. Электроемкость плоского конденсатора. Последовательное и параллельное соединение конденсаторов. Энергия заряженного конденсатора.

Энергия электрического поля.

3.2. Постоянный ток

Электрический ток. Сила тока. Условия существования тока в цепи. Электродвижущая сила (ЭДС). Напряжение.

Закон Ома для участка цепи. Омическое сопротивление проводника. Удельное сопротивление. Зависимость удельного сопротивления от температуры. Сверхпроводимость. Последовательное и параллельное соединение проводников. Измерение силы тока, напряжения и сопротивления.

Закон Ома для полной цепи. Источники тока, их соединение. Правила Кирхгофа.

Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца.

Электрический ток в металлах.

Электрический ток в электролитах. Законы электролиза.

Электрический ток в вакууме. Термоэлектронная эмиссия. Электронная лампа – диод. Электронно-лучевая трубка.

Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников. Зависимость проводимости полупроводников от температуры. p - n – переход и его свойства. Полупроводниковый диод. Транзистор. Термистор и фоторезистор.

Электрический ток в газах. Самостоятельный и несамостоятельный разряды. Понятие о плазме.

3.3. Магнетизм

Магнитное поле. Действие магнитного поля на рамку с током. Индукция магнитного поля (магнитная индукция). Линии магнитной индукции. Картины магнитного поля прямого тока и соленоида. Понятие о магнитном поле Земли.

Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Закон Ампера.

Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.

Магнитные свойства вещества. Гипотеза Ампера. Ферромагнетики.

3.4. Электромагнитная индукция

Магнитный поток. Опыты Фарадея. Явление электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца.

Самоиндукция. Индуктивность. ЭДС самоиндукции.

Энергия магнитного поля тока.

3.5. Электромагнитные колебания и волны

Переменный электрический ток. Амплитудное и действующее (эффективное) значение периодически изменяющегося напряжения и тока.

Получение переменного тока с помощью индукционных генераторов. Трансформатор. Передача электрической энергии.

Колебательный контур. Свободные электромагнитные колебания в контуре. Превращение энергии в колебательном контуре. Уравнение, описывающее процессы в колебательном контуре, и его решение. Формула Томсона для периода колебаний. Затухающие электромагнитные колебания.

Вынужденные колебания в электрических цепях. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления в цепи гармонического тока. Резонанс в электрических цепях.

Открытый колебательный контур. Опыты Герца. Электромагнитные волны. Их свойства. Шкала электромагнитных волн. Излучение и прием электромагнитных волн. Принципы радиосвязи.

4. ОПТИКА

4.1. Геометрическая оптика

Развитие взглядов на природу света. Закон прямолинейного распространения света. Понятие луча.

Интенсивность (плотность потока) излучения. Световой поток. Освещенность.

Законы отражения света. Плоское зеркало. Сферическое зеркало. Построение изображений в плоском и сферическом зеркалах.

Законы преломления света. Абсолютный и относительный показатели преломления. Ход лучей в призме. Явление полного (внутреннего) отражения.

Тонкие линзы. Фокусное расстояние и оптическая сила линзы. Построение изображения в собирающих и рассеивающих линзах. Формула линзы. Увеличение, даваемое линзами.

Оптические приборы: лупа, фотоаппарат, проекционный аппарат, микроскоп. Ход лучей в этих приборах. Глаз.

4.2. Элементы физической оптики

Волновые свойства света. Поляризация света. Электромагнитная природа света.

Скорость света в однородной среде. Дисперсия света. Спектроскоп. Инфракрасное и ультрафиолетовое излучения.

Интерференция света. Когерентные источники. Условия образования максимумов и минимумов в интерференционной картине.

Дифракция света. Опыт Юнга. Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракционная решетка.

Корпускулярные свойства света. Постоянная Планка. Фотоэффект. Законы фотоэффекта. Фотон. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Давление света. Опыты Лебедева по измерению давления света.

Постулаты теории относительности (постулаты Эйнштейна). Связь между массой и энергией.

5. АТОМ И АТОМНОЕ ЯДРО

Опыты Резерфорда по рассеянию α -частиц. Планетарная модель атома. Квантовые постулаты Бора. Испускание и поглощение энергии атомом. Непрерывный и линейчатый спектры. Спектральный анализ.

Экспериментальные методы регистрации заряженных частиц: камера Вильсона, счетчик Гейгера, пузырьковая камера, фотоэмульсионный метод.

Состав ядра атома. Изотопы. Энергия связи атомных ядер. Понятие о ядерных реакциях. Радиоактивность. Виды радиоактивных излучений и их свойства. Цепные ядерные реакции. Термоядерная реакция.

Биологическое действие радиоактивных излучений. Защита от радиации.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Физика: Механика. 10 кл.: Учебник для углубленного изучения физики /Под ред. Г.Я. Мякишева. – М.: Дрофа, 2001.
2. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика: Молекулярная физика. Термодинамика. 10 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
3. Мякишев Г.Я., Синяков А.З., Слободсков Б.А. Физика: Электродинамика. 10 – 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
4. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика: Колебания и волны. 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
5. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика: Оптика. Квантовая физика. 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
6. Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М. Задачи по элементарной физике. – М.: Физматлит, 2000 и последующие издания.
7. Бендриков Г.А., Буховцев Б.Б., Керженцев В.Г., Мякишев Г.Я. Физика. Для поступающих в вузы: Учебн. пособие. Для подготов. отделений вузов. – М.: Физматлит, 2000 и последующие издания.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Грачев А.В., Погожев В.А., Селиверстов А.В. Физика: 7 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2007.
2. Грачев А.В., Погожев В.А., Вишнякова Е.А. Физика: 8 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2008.
3. Грачев А.В., Погожев В.А., Боков П.Ю. Физика: 9 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2010.
4. Грачев А.В., Погожев В.А., Салецкий А.М., Боков П.Ю. Физика: 10 класс: Базовый уровень; профильный уровень: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2011.

5. Грачев А.В., Погожев В.А., Салецкий А.М., Боков П.Ю. Физика: 11 класс: Базовый уровень; профильный уровень: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2012.
6. Элементарный учебник физики /под ред. Г.С. Ландсберга. В 3-х кн. – М.: Физматлит, 2000 и последующие издания.
7. Яворский Б.М., Селезнев Ю.Д. Физика. Справочное пособие. Для поступающих в вузы. – М.: Физматлит, 2000 и последующие издания.
8. Физика. Учебники для 10 и 11 классов школ и классов с углубленным изучением физики /под ред. А.А. Пинского. – М.: Просвещение, 2000 и последующие издания.
9. Бутиков Е.И., Кондратьев А.С. Физика. В 3-х кн. М.: Физматлит, 2001.
10. Павленко Ю.Г. Физика. Полный курс для школьников и поступающих в вузы: Учебное пособие. – М.: Большая Медведица, 2002.
11. Сборник задач по физике /под ред. С.М. Козела – М.: Просвещение, 2000 и предшествующие издания.
12. Гольдфарб Н.И. Физика. Задачник. 9 – 11 кл.: Пособие для общеобразовательных учебных заведений. – М.: Дрофа, 2000 и последующие издания.
13. Задачи по физике /под ред. О.Я. Савченко – М.: Наука, 1988.
14. Задачи вступительных экзаменов и олимпиад по физике в МГУ – 1992–2012. – М.: Физический факультет МГУ, 2012 и предшествующие издания.
15. Отличник ЕГЭ. Физика. Решение сложных задач /под ред. В.А. Макарова, М.В. Семенова, А.А. Якуты; ФИПИ. – М.: Интеллект–Центр, 2010.
16. Драбович К.Н., Макаров В.А., Чесноков С.С. Физика. Подготовка к вступительным испытаниям в МГУ. – М.: Макс Пресс, 2009.
17. Драбович К.Н., Макаров В.А., Чесноков С.С. Физика. 770 задач с подробными решениями. – М.: Макс Пресс, 2009.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ – 2013»

В 2013 году МГУ совместно с газетой «Московский комсомолец» в девятый раз подряд проводили олимпиаду «Покори Воробьевы горы», которая традиционно проходила в два тура: заочный и очный. Условия задач заочного тура были опубликованы в газете «Московский комсомолец» и на сайте МГУ. Победители заочного тура были приглашены на очные туры, которые проходили в семи городах России: Барнауле, Брянске, Иркутске, Йошкар-Оле, Москве, Ростове на Дону и Уфе. Задания, предлагавшиеся участникам очных туров, содержали четыре теоретических вопроса, взятых из Программы вступительных испытаний по физике в МГУ, и четыре дополняющих их задачи. Ниже приведены задачи, предлагавшиеся на олимпиаде «Покори Воробьевы горы – 2013».

I. ЗАОЧНЫЙ ТУР

Задание для 7-х – 9-х классов

I.1. Встречные электрички. Две одинаковые электрички, каждая из которых состояла из $N = 15$ вагонов, ехали навстречу друг другу. Скорость одной из них (будем считать ее «первой») равнялась $v_1 = 17$ м/с. В тот момент, когда электрички встретились, помощник машиниста первой электрички побежал из кабины, расположенной в «голове» электрички, вдоль состава с постоянной скоростью $u = 2$ м/с. Он как раз успел добежать до конца первого вагона своей электрички, когда мимо него проехал «хвост» второй электрички. Какова скорость второй электрички? Ответ запишите в м/с, округлив до целого значения.

I.2. Не все то золото. Имеется 10 мешочков с золотыми монетами. В каждом мешочке находится по 1000 монет. В одном мешочке все монеты – фальшивые (изготовлены не из чистого золота), а в остальных все монеты настоящие. Настоящая монета весит 12,00 г, а фальшивая – на 0,42 г легче. Вам необходимо с помощью одного взвешивания наверняка определить, в каком из мешочков находятся фальшивые монеты. Для этой цели можно достать любое количество монет из любого мешочка. Какими должны быть характеристики весов, чтобы с их помощью можно было это сделать? В качестве первого ответа укажите (в граммах) минимальное кратное 100 значение $M_{\min}$ верхней границы

диапазона масс, которые можно взвешивать на таких весах, а в качестве второго запишите (также кратное 100, но в миллиграммах) максимальное допустимое значение погрешности $\delta M_{\max}$ измерения массы этими весами.

I.3. До самого края. Мензурка высотой $H = 20$ см установлена вертикально (рис. 1). В нижней ее половине находится пружина жесткостью $k = 14$ Н/м, закрытая сверху тонкой легкой непроницаемой для воды крышечкой, которая без трения может перемещаться внутри мензурки. Сколько грамм воды плотностью $\rho = 1$ г/см³ надо аккуратно налить в мензурку сверху, чтобы заполнить ее до верхнего края? Площадь поперечного сечения мензурки $S = 4$ см². Для расчетов примите $g = 10$ м/с². Давление воздуха не учитывайте, т.е считайте, что воздух выходит из объема, занятого пружиной, ровно настолько, что его давление не изменяется.

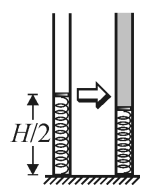


Рис. 1

I.4. Лед и пар. В вертикальном цилиндре с теплоизолирующими гладкими стенками под подвижным теплонепроницаемым поршнем находился водяной пар при температуре $t_0 = 100^\circ\text{C}$, причем на стенках цилиндра были мелкие капельки воды. Площадь поперечного сечения цилиндра равна $S = 400$ см², поршень располагался на высоте $h = 40$ см над дном цилиндра. Не нарушая теплоизоляции и не сдвигая поршень, в цилиндр поместили кусочек льда массой $m = 1$ г при температуре $t_1 = 0^\circ\text{C}$. На сколько миллиметров опустится поршень за достаточно продолжительное время? Ответ на этот вопрос приведите в качестве первого ответа, округлив до целого значения. Чему равно изменение внутренней энергии содержимого цилиндра (от момента начала таяния льда до остановки поршня)? Ответ на этот вопрос считайте вторым, приведите его в джоулях, округлив до целого значения. Считайте, что удельная теплота плавления льда $\lambda \approx 340$ кДж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/кг·К, удельная теплота парообразования воды $r = 2480$ кДж/кг, давление и плотность насыщенного водяного пара при температуре t_0 равны соответственно $p_0 \approx 10^5$ Па и $\rho_0 \approx 0,58$ кг/м³.

I.5. Артиллерийская дуэль на Луне. Два орудия, установленные на плоском горизонтальном участке лунной поверхности на расстоянии $L = 3,860$ км, одновременно произвели выстрелы друг по другу. Снаряд, пущенный из первого орудия, вылетел под углом $\alpha_1 = 30^\circ$, а из второго – под углом $\alpha_2 = 60^\circ$ к горизонту. Оба снаряда попали точно в цель. На каком минимальном расстоянии друг от друга находились снаряды во время полета? Ответ запишите в метрах, округлив до целого значения.

I.6. Загадка реостата Однажды Петя Васечкин собрал из трех ламп, резистора с сопротивлением $R = 36$ Ом и реостата «гирлянда» по схеме, показанной на рис. 2, и подключил ее к источнику постоянного напряжения. Надписи на лампах стерлись, но Петя помнил, что они были рассчитаны на одинаковое напряжение, но у двух из них номинальная мощность была равна $N_1 = 12$ Вт, а у третьей – $N_2 = 8$ Вт. Неожиданно Петя обнаружил, что при изменении положения движка реостата яркость свечения всех ламп совершенно не меняется. Найдите сопротивления ламп, считая, что они примерно постоянны и равны своим значениям в номинальном режиме. В качестве первого ответа приведите значение сопротивления каждой из пары одинаковых ламп, а второго – сопротивление третьей лампы.

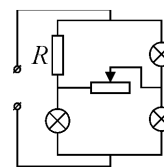


Рис. 2

I.7. Ответственное поручение. Однажды техник Гайка сконструировала систему из легкого блока с перекинутой через него легкой нерастяжимой нитью, на концах которой прикреплены грузы массами m и $3m$. Она поручила Вжику тянуть за ось блока таким образом, чтобы ось двигалась вертикально и при этом ускорения грузов относительно Земли отличались друг от друга по модулю вдвое. Найдите необходимое значение проекции a ускорения оси блока на ось OX , направленную вертикально вниз (рис. 3). Ответы округлите до сотых. Считайте ускорение свободного падения равным $g \approx 9,80$ м/с².

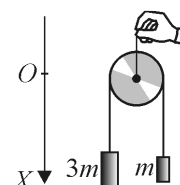


Рис. 3

Задание для 10-х – 11-х классов

I.8. Артиллерийская дуэль на Луне. Два орудия, установленные на плоском горизонтальном участке лунной поверхности на расстоянии

$L = 3535$ м, одновременно произвели выстрелы друг по другу. Снаряды вылетели из жерл орудий с одинаковыми скоростями, причем оба снаряда попали точно в цель, а минимальное расстояние между ними в процессе полета равнялось $l = 500$ м. Найдите скорость v вылета снарядов. Ответ округлите до целого значения. Ускорение свободного падения на Луне примите равным $g \approx 1,6$ м/с².

I.9. Теплообменник. В теплоизолированном цилиндрическом вертикальном сосуде объемом 2 л содержится $V_1 = 1$ л воды при температуре $t_1 = 40^\circ\text{C}$. На середине высоты из этого сосуда выведена тонкая трубка с краном. В другом теплоизолированном сосуде содержится $V_2 = 1$ л воды при температуре $t_2 = 67^\circ\text{C}$. Для подогрева воды в первом сосуде можно n раз медленно доливать в него воду из второго сосуда и сливать часть воды через кран (не наклоняя первый сосуд). Какой максимальной температуры t_{max} воды в первом сосуде можно достичь таким образом при $n = 2$? Ответ запишите в градусах по шкале Цельсия, округлив до целого значения.

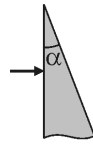


Рис. 4

I.10. Солнечные зайчики. Клин с преломляющим углом $\alpha = 7^\circ$ изготовлен из стекла с показателем преломления $n = 1,6$. Перпендикулярно одной из граней клина падает узкий пучок параллельных световых лучей (рис. 4). За клином установлен экран достаточно больших размеров. Сколько светлых пятен k будет видно на экране?

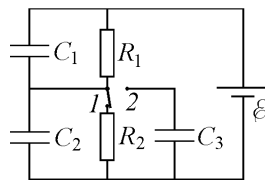


Рис. 5

I.11. От prestissimo до adagio. В схеме, показанной на рис. 5, переключатель достаточно долго находился в положении 1. Какое количество теплоты Q выделится в резисторе $R_1 = R$ после перевода переключателя в положение 2? ЭДС источника $\mathcal{E} = 24$ В, емкости конденсаторов $C_2 = C_3 = C = 200$ мкФ, $C_1 = 2C = 400$ мкФ, $R_2 = R$, сопротивление соединительных проводов и внутреннее сопротивление источника пренебрежимо малы по сравнению с R . Ответ приведите в мДж, округлив до целого значения.

I.12. Термодинамический сапог. Диаграмма цикла 1–2–3–4–5–6, проводимого с постоянным количеством идеального одноатомного газа, являющегося рабочим телом тепловой машины, в координатах $p-V$ имеет форму «сапога» (рис. 6). Известно, что прямая 1–5 в выбранном масштабе – это биссектриса координатного квадранта, а максимальная и минимальная температуры газа в цикле отличаются в 16 раз. Найдите коэффициент полезного действия η этого цикла. Ответ приведите в процентах.

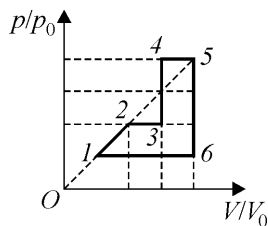


Рис. 6

I.13. Покачаемся? Один любознательный школьник построил у себя во дворе установку для изучения колебаний (рис. 7). Он взял легкую штангу длиной $L = 1,5$ м, левый ее конец закрепил на неподвижной стенке с помощью шарнира, могущего вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, а правый конец соединил с вертикальной пружиной жесткостью $k = 800$ Н/м. На штанге он закрепил небольшой по размерам груз массой $m = 18$ кг, причем высоту нижнего конца пружины он подбирал так, чтобы при любом размещении груза на штанге (т.е. при любом x) в положении равновесия штанга была горизонтальна. Школьник исследовал зависимость периода малых колебаний штанги с грузом от величины x . Какое значение разности периодов колебаний $\Delta T = T_1 - T_2$, он получил, если $x_1 = 1$ м, а $x_2 = 0,5$ м. Ответ приведите в миллисекундах, округлив до целого значения.

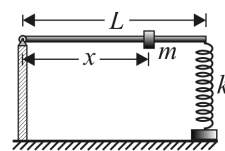


Рис. 7

I.14. Нарушение покоя. Тонкая прямая однородная палочка покоится на горизонтальной поверхности. Если действовать на эту палочку силой, направленной строго вдоль ее оси, то она начинает двигаться, если величина этой силы достигнет $F_0 = 2,4$ Н. Чему равна минимальная сила, способная заставить палочку прийти в движение? Дайте последовательно ответы для трех значений коэффициента трения палочки о поверхность: $\mu_1 = 0,4$, $\mu_2 = 0,8$ и $\mu_3 = 1,6$. Ответы округлите до сотых.

II. ОЧНЫЙ ТУР

Задание для 7-х – 9-х классов

II.1. Известно, что Попугай всегда прогуливается со скоростью $u = 0,5$ м/с. Однажды он встретил неспешно ползущего Удава, и прошел мимо него за время $t_1 = 9$ с. После этого Удав резко развернулся, и, не изменив скорости, пополз вдоль себя самого. В результате его голова поравнялась с хвостом спустя время $t_2 = 9,5$ с. Во сколько раз n единица измерения длины «попугай» меньше единицы измерения длины в системе СИ? Напоминаем, что длина Удава составляет 38 попугаев и одно попугайское крылышко. Крылышко можно не считать.

II.2. Шар из растворимой соли со сферической воздушной полостью в центре, имеющий массу $m_0 = 200$ г, опустили в воду. Соль растворяется медленно, равномерно по всей поверхности шара, с практически постоянной скоростью $q = 0,2$ г/с. Таким образом, насыщения раствора на рассматриваемом промежутке времени не происходит. Ионы, образующиеся при растворении соли, очень быстро распределяются по всему объему жидкости. При этом объем получающегося раствора почти не отличается от начального объема воды. Известно, что средняя плотность шара до опускания в воду в два раза больше плотности воды, плотность соли в четыре раза больше плотности воды, а начальный объем шара в четыре раза меньше начального объема воды. Спустя какое время τ после начала растворения шар всплывет?

II.3. В легкой теплоизолирующей капсуле находится жидкая вода, занимающая примерно половину объема капсулы, и очень маленький кристаллик льда. Остальную часть объема капсулы занимают воздух и водяной пар. Температура содержимого капсулы $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Через небольшое отверстие из капсулы медленно откачивают влажный воздух. При этом температура содержимого длительное время остается неизменной, а его масса уменьшается. Во сколько раз n масса капсулы с содержимым в тот момент, когда температура внутри нее начнет уменьшаться, будет меньше ее первоначальной массы? Удельную теплоту плавления льда примите равной $\lambda = 340$ кДж/кг, а удельную теплоту парообразования воды – $r = 2480$ кДж/кг.

II.4. Два маленьких шарика массой m каждый соединены легким непроводящим жестким стержнем. На шарики нанесены заряды, равные по величине и противоположные по знаку, т.е. $+q$ и $-q$. Эта система подвешена за один из шариков к потолку на невесомой непроводящей нити в однородном поле тяжести g и однородном электрическом поле E , силовые линии которого горизонтальны. Система находится в равновесии. Найдите силу натяжения нити T . Под каким углом α к вертикали располагается стержень?

Задание для 10-х – 11-х классов

Механика

II.5. Два маленьких тела одновременно начали двигаться в однородном гравитационном поле g . Начальные скорости тел равны по модулю v_0 и лежат в одной вертикальной плоскости. Угол наклона к горизонту вектора одной из скоростей равен α , а другой – 2α . Через какое время τ от начала движения тел их скорости окажутся сонаправленными? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

II.6. Два маленьких камушка одновременно бросают с одинаковыми по модулю скоростями v_0 , причем первый камушек горизонтально, а второй – вверх под углом α к горизонту так, что горизонтальная составляющая его скорости направлена противоположно скорости первого камушка. Через некоторое время τ , меньшее времени полета, скорости камушков оказались взаимно перпендикулярными. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите τ . Ускорение свободного падения g .

II.7. Между двумя брусками массами m_1 и m_2 , расположенными на горизонтальной поверхности, находится невесомая пружина жесткостью k , сжатая на величину ΔL по сравнению с недеформированным состоянием. Прямая, проходящая через центры масс брусков, совпадает с осью пружины, а концы пружины касаются брусков. В некоторый момент бруски отпустили. Найдите их скорости v_1 и v_2 сразу после отрыва от пружины. Трением можно пренебречь.

II.8. Брусок массой M , покоящийся на горизонтальной поверхности, связан с недеформированной легкой пружиной жесткостью k . Вторым концом пружины закреплен. В брусок попадает и застревает в нем

пуля массой m , летевшая горизонтально вдоль оси пружины со скоростью v_0 . Найдите путь S , пройденный бруском до первой остановки, если коэффициент трения между бруском и поверхностью равен μ . Ускорение свободного падения g .

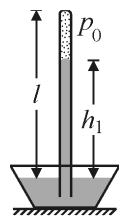


Рис. 8

П.9. В трубку ртутного барометра, запаянную сверху, попал пузырек воздуха (рис. 8). В результате высота столба ртути в трубке уменьшилась и при некотором атмосферном давлении p_0 и температуре T_0 стала равной h_1 . Чему равно атмосферное давление p при температуре T , если при этом высота столба ртути равна h ? Расстояние от уровня ртути в чашке до запаянного конца трубки равно l . Плотность ртути ρ , ускорение свободного падения g .

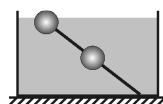


Рис. 9

П.10. Система состоит из двух шаров одинакового диаметра, закрепленных на тонком невесомом стержне. Один шар практически невесомый, другой тяжелый. Центр тяжелого шара совпадает с серединой стержня, а центр легкого – с одним из его концов. Система погружена в воду так, что свободный конец стержня опирается о дно сосуда, стержень располагается наклонно, а из воды выступает часть легкого шара (рис. 9). Отношение объема выступающей части к объему всего шара равно k . При каких значениях k эта система будет плавать на глубокое место?

П.11. Маленький железный шарик массой m , висающий на длинной нерастяжимой невесомой нити, имеет период малых колебаний T_0 . Шарик поместили между полюсами постоянного магнита так, что на него стала действовать со стороны магнитного поля постоянная горизонтальная сила. Найдите модуль этой силы F , если период малых колебаний шарика стал равным T . Ускорение свободного падения g .

Молекулярная физика и термодинамика

П.12. Прочный сосуд объемом $V = 20$ л, содержащий $m = 6$ г гелия, движется со скоростью $v_0 = 500$ м/с. На какую величину Δp увеличится давление гелия в сосуде, если сосуд внезапно остановить? Считайте, что теплообмен между гелием и стенками сосуда за время установления теплового равновесия в сосуде пренебрежимо мал.

II.13. Жесткий сосуд с гелием, двигавшийся с некоторой скоростью, резко остановили. При этом температура гелия в сосуде увеличилась на $\Delta T = 10$ К. С какой скоростью v двигался сосуд? Молярная масса гелия $M = 4$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль·К). Считайте, что теплообмен между гелием и стенками сосуда за время установления теплового равновесия в сосуде пренебрежимо мал.

II.14. В расположенном горизонтально теплоизолированном цилиндре слева от закрепленного поршня находится одноатомный идеальный газ, а справа от поршня воздух откачан. Пружина, расположенная между поршнем и правой стенкой сосуда, находится первоначально в недеформированном состоянии. Когда поршень освободили, то после установления теплового равновесия объем, занимаемый газом, увеличился вдвое. Во сколько раз m изменилась при этом температура газа и во сколько раз n изменилось его давление? Теплоемкостями цилиндра, поршня и пружины можно пренебречь.

II.15. Одноатомный идеальный газ в количестве ν молей находится в теплоизолированном непроводящем цилиндре под подвижным поршнем. Дно цилиндра и поршень равномерно заряжены равными по величине и противоположными по знаку зарядами. Газу медленно передают от нагревателя количество теплоты Q . На какую величину ΔT изменится температура газа? Считайте, что электрическое поле внутри цилиндра однородно, а поршень движется без трения.

II.16. С некоторым количеством идеального одноатомного газа совершается цикл, состоящий из процесса с линейной зависимостью давления от объема 1–2, изохоры 2–3 и изобары 3–1 (см. рис. 10). Определите коэффициент полезного действия η этого цикла. Температуры в точках 1 и 2 равны соответственно T_1 и T_2 .

II.17. С некоторым количеством одноатомного идеального газа осуществляется цикл, состоящий из изохоры 1–2, изобары 2–3 и процесса с линейной зависимостью давления от объема 3–1 (см. рис. 11). Определите коэффициент полезного действия η цикла. Температуры в точках 1 и 3 равны соответственно T_1 и T_3 .

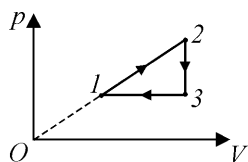


Рис. 10

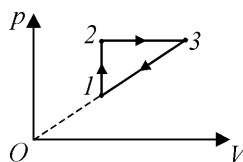


Рис. 11

П.18. В сосуде с гладкими вертикальными стенками под невесомым поршнем находится влажный воздух при температуре $T = 373$ К под давлением $p_1 = 10^5$ Па. При увеличении внешнего давления над поршнем в два раза высота расположения поршня над дном сосуда уменьшилась в три раза. Найдите относительную влажность воздуха φ в начальном состоянии.

Электродинамика

П.19. Плоский конденсатор с пластинами квадратной формы размерами $a \times a$ и расстоянием между пластинами d присоединен к полюсам источника с ЭДС $\mathcal{E}$. В пространство между пластинами с постоянной скоростью v вводят стеклянную пластину толщиной $h = d$ и шириной a . Какой ток I будет протекать при этом в цепи? Диэлектрическая проницаемость стекла ϵ . Электрическая постоянная ϵ_0 . Внутренним сопротивлением источника можно пренебречь.

П.20. К источнику с ЭДС $\mathcal{E}$ подключили плоский воздушный конденсатор. Площадь каждой из пластин конденсатора S . Пластины сближают так, что расстояние между ними меняется со временем по закону $d(t) = d_0 / (1 + \alpha t)$, где d_0 и α – известные постоянные. Определите силу тока I , протекающего при этом через источник. Внутренним сопротивлением источника можно пренебречь.

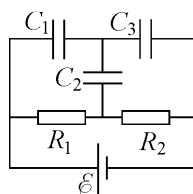


Рис. 12

П.21. Перед сборкой схемы (рис. 12) все конденсаторы были разряжены. Найдите заряд q_2 , накопившийся на конденсаторе C_2 за достаточно большое время после сборки схемы и подключения источника. Емкости конденсаторов равны: $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ, $C_3 = 3$ мкФ; сопротивления резисторов $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом; ЭДС источника $\mathcal{E} = 6$ В. Внутренним сопротивлением источника можно пренебречь.

II.22. Семь резисторов сопротивлениями $R_1 = 1 \text{ кОм}$, $R_2 = 2 \text{ кОм}$, $R_3 = 0,5 \text{ кОм}$, $R_4 = 2,5 \text{ кОм}$, $R_5 = 2 \text{ кОм}$, $R_6 = 1 \text{ кОм}$, $R_7 = 1 \text{ кОм}$ соединены с источником постоянного напряжения $U = 30 \text{ В}$ (рис. 13). К резисторам подключили два вольтметра и два амперметра. Определите их показания U_1, U_2, I_1, I_2 . Все приборы и источник считайте идеальными.

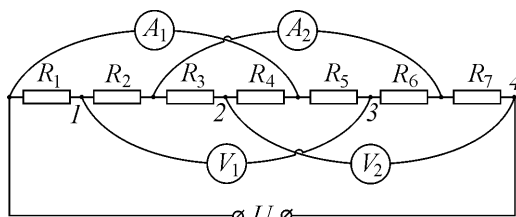


Рис. 13

II.23. На какое расстояние l можно передать электрическую энергию по медным проводам так, что бы потеря энергии в проводах не превышала 3 %? Передаваемая мощность $N = 2 \text{ МВт}$ при напряжении $U = 1000 \text{ кВ}$. Площадь поперечного сечения проводов $S = 4,5 \text{ мм}^2$, удельное сопротивление меди $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

II.24. Электролитическая ванна имеет вид прямоугольного параллелепипеда, две противоположные вертикальные грани которого представляют собой металлические электроды квадратной формы. Остальные вертикальные грани и дно ванны – непроводящие. Длина ванны равна L . Сверху ванна открыта и заполнена электролитом ровно наполовину (рис. 14). К электродам подведено постоянное напряжение U . В объеме ванны создано вертикальное однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Под каким углом α к горизонту расположится свободная поверхность электролита? Плотность электролита равна ρ_0 , удельное сопротивление электролита ρ , ускорение свободного падения g . Перелившийся через край ванны электролит покидает систему и не влияет на протекание тока через ванну.

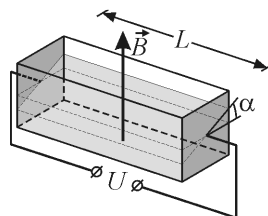


Рис. 14

II.25. В вертикальном однородном магнитном поле с индукцией, модуль которой равен B , расположены горизонтальные металлические направляющие, по которым может скользить без трения проводящая перемычка длиной l и массой m . Направляющие соединены между собой катушкой индуктивностью L . Перемычку приводят в движение толчком, так, что она начинает двигаться по направляющим поступательно. Определите период T малых колебаний перемычки вблизи исходного положения. Сопротивлением направляющих, катушки и перемычки можно пренебречь.

Оптика

II.26. В воздухе длина волны монохроматического света $\lambda_0 = 0,6$ мкм. При переходе в стекло длина волны становится равной $\lambda = 0,42$ мкм. Под каким углом α свет падает на границу раздела воздух–стекло, если отраженный и преломленный лучи образуют прямой угол?

II.27. Точечный источник света расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы на расстоянии $a = 30$ см от нее. На экране, расположенном перпендикулярно главной оптической оси на расстоянии $L_1 = 10$ см от линзы, наблюдается светлое пятно. Размеры пятна не изменятся, если экран расположить на расстоянии $L_2 = 20$ см от линзы. Определите фокусное расстояние линзы F .

II.28. Предмет и его прямое изображение расположены симметрично относительно фокуса собирающей линзы. Расстояние от предмета до фокуса линзы $l = 4$ см. Найдите фокусное расстояние линзы F .

II.29. На экране с помощью тонкой линзы получено резкое изображение предмета с увеличением $\Gamma_1 = 2$. Предмет передвинули на расстояние $L_1 = 1$ см. Для того чтобы снова получить резкое изображение предмета, пришлось передвинуть экран. При этом увеличение оказалось равным $\Gamma_2 = 4$. На какое расстояние L_2 передвинули экран?

II.30. На каком расстоянии a от собирающей линзы надо поместить предмет, чтобы расстояние между предметом и его действительным изображением было минимальным? Фокусное расстояние линзы равно f .

II.31. С одной стороны от линзы с оптической силой $D = -5$ дптр параллельно ее плоскости установили экран. Расстояние от экрана до линзы $a = 15$ см. С другой стороны от линзы на ее главной оптической оси на расстоянии $d = 20$ см от линзы расположили точечный источник света. Радиус светлого пятна на экране, образованного лучами, прошедшими через линзу, $R = 10$ см. Определите радиус линзы r .

II.32. По одну сторону от собирающей линзы с фокусным расстоянием F на ее главной оптической оси находится точечный источник света, по другую – плоское зеркало. Плоскость зеркала перпендикулярна главной оптической оси. Расстояние от источника до линзы $d = 1,5F$. На каком расстоянии L от линзы нужно расположить зеркало, чтобы лучи, прошедшие через линзу, после отражения от него собирались на расстоянии $2F$ от линзы?

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ – 2012/2013»

В 2012/2013 учебном году олимпиада «Ломоносов» по физике в МГУ проводилась в два этапа – отборочный и заключительный.

I. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Отборочный этап проходил в форме заочного испытания. На этом этапе каждый ученик мог участвовать по собственному выбору в одном, двух или трех турах, проводимых по единой форме и с равноценными заданиями. Задания олимпиады были размещены в Интернете на сайте <http://distant.phys.msu.ru>. Доступ к условиям заданий был открыт для участников трижды: с 17 по 21 ноября 2012 года (1-й тур), с 1 по 5 декабря 2012 года (2-й тур) и с 11 по 15 января 2013 года (3-й тур). Прием решений и ответов по каждому из туров прекращался одновременно с их завершением. После прохождения всех туров олимпиады каждый участник до 19 января 2013 года должен был самостоятельно определить номер тура, который для него является официальным. Победители и призеры отборочного этапа были приглашены для участия в заключительном этапе олимпиады.

Ниже приводятся примеры заданий для участников отборочного тура олимпиады Ломоносов.

Задание для 7-х – 9-х классов

I.1. Движущийся вверх эскалатор метро поднимает идущего в том же направлении пассажира за время $t_1 = 2$ мин, а стоящего на нем – за время $t_2 = 3$ мин. Сколько времени τ спускался бы пассажир по неподвижному эскалатору, если бы шёл с той же по модулю скоростью, с какой он поднимался по движущемуся эскалатору? Ответ приведите в минутах, округлив до целых.

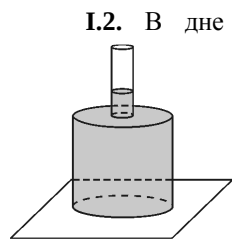


Рис. 15

I.2. В дне цилиндрической открытой банки вместимостью $V_0 = 100 \text{ см}^3$ проделали отверстие и припаяли к дну трубку, расположив ее перпендикулярно дну. Затем банку поставили вверх дном на тонкий лист резины, лежащий на горизонтальном столе, как показано на рис. 15. Потом через трубку в банку стали медленно наливать воду. Когда объем налитой воды превысил $V = 110 \text{ см}^3$, вода начала подтекать из-под края банки на резиновый лист. Найдите массу m банки с трубкой, если площади поперечного сечения банки и трубки равны соответственно $S = 10 \text{ см}^2$ и $s = 1 \text{ см}^2$. Плотность воды равна $\rho = 1 \text{ г/см}^3$. Ответ приведите в граммах, округлив до целых.

I.3. Туристы, собираясь в зимний поход, взяли с собой портативный примус и запас бензина. На привале им потребовалась вода для приготовления пищи. Они решили растапливать снег в железном котелке, поставив его примус. Стояла оттепель и температура снега была равна $t_0 = 0^\circ\text{C}$, причем снег был мокрым, т.е. его масса состояла на 80% из массы кристалликов льда и на 20% из массы воды. Какую массу m_b бензина затратили туристы, чтобы получить $V = 2$ литра воды при температуре $t = 100^\circ\text{C}$? Плотность воды $\rho = 1 \text{ г/см}^3$, удельная теплоемкость воды $c_v = 4,2 \text{ кДж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$, масса котелка $M = 400 \text{ г}$, удельная теплоемкость железа $c_{\text{ж}} = 0,46 \text{ кДж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330 \text{ кДж/кг}$, удельная теплота сгорания бензина $q = 44 \text{ МДж/кг}$. Считайте, что на нагрев воды и котелка идет $\eta = 40\%$ количества теплоты, выделяющейся при сгорании бензина. Ответ приведите в граммах, округлив до целого.

I.4. Три одинаковых резистора соединены в цепь, схема которой изображена на рис. 16, причем сопротивление между точками A и B равно $R_{AB} = 3$ Ом. Чему станет равным сопротивление R'_{AB} между точками A и B , если точки C и D соединить проводником, как показано на рисунке штриховой линией?

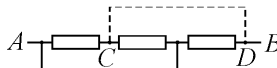


Рис. 16

I.5. Поезд начинает двигаться с постоянным ускорением и проходит начальный отрезок пути разгона, составляющий $1/9$ часть от полного пути разгона, со средней скоростью $v_{cp} = 10$ км/ч. Какова скорость v поезда в конце пути разгона? Ответ приведите в км/ч и округлите до целых.

Задание для 10-х – 11-х классов

I.6. С поверхности земли подброшен вертикально вверх небольшой шарик с начальной скоростью $v_0 = 5$ м/с. В тот момент, когда он достиг верхней точки, снизу, с того же места подброшен точно такой же шарик с такой же начальной скоростью. При столкновении шарики слипаются и движутся далее как одно целое. Определите промежуток времени τ , в течение которого первый шарик находился в полёте от момента броска до момента соприкосновения с поверхностью земли. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с². Ответ округлите до одного знака после запятой.

I.7. Шарик массой $m = 100$ г подвешен на двух одинаковых нитях длиной $a = 1$ м каждая так, что точки подвеса нитей расположены на одной горизонтали. Расстояние между точками подвеса нитей равно $b = 1$ м. Найдите силу натяжения T правой нити сразу после пережигания левой нити. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с². Нити считайте нерастяжимыми. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

I.8. В вертикально расположенном цилиндре находится кислород массой $m = 64$ г, отделенный от атмосферы поршнем, который соединен с дном цилиндра пружиной жесткостью $k = 8,3 \cdot 10^2$ Н/м (см. рис. 17).

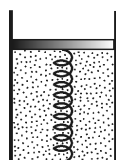


Рис. 17

При температуре $T_1 = 300$ К поршень располагается на расстоянии $h = 1$ м от дна цилиндра. До какой температуры T_2 надо нагреть кислород, чтобы поршень расположился на высоте $H = 1,5$ м от дна цилиндра? Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль·К), молярная масса кислорода $M = 32$ г/моль. Ответ приведите по шкале Кельвина, округлив его до одного знака после запятой.

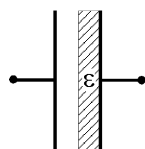


Рис. 18

1.9. В плоский воздушный конденсатор вставили диэлектрическую пластину так, что она заняла половину пространства между обкладками конденсатора (рис. 18). При этом емкость конденсатора увеличилась в $n = 1,6$ раз. Определите диэлектрическую проницаемость ϵ пластины. Ответ округлите до целых.

1.10. На расстоянии $f = 15$ м от объектива проекционного аппарата расположен экран с размерами 2×3 м. На экране получено четкое изображение диапозитива, имеющего размеры 24×36 мм. При этом изображение занимает половину площади экрана. Рассчитайте оптическую силу D тонкой линзы, которую следует вплотную приставить к объективу проекционного аппарата, чтобы четкое изображение точно уложилось в размеры экрана. Объектив проекционного аппарата считайте тонкой линзой. Ответ приведите в диоптриях, округлив до одного знака после запятой.

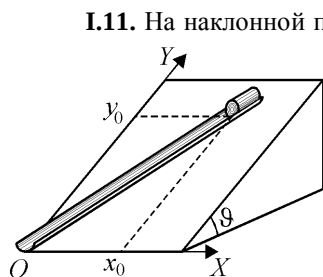


Рис. 19

1.11. На наклонной плоскости, образующей с горизонтальной поверхностью угол $\vartheta = 30^\circ$, закреплен желоб, как показано на рис. 19. С плоскостью связана координатная система XOY , начало которой совмещено с нижней точкой желоба. По желобу из состояния покоя начинает соскальзывать маленькая гирька. Найдите скорость v гирьки в нижней точке желоба, если начальные координаты гирьки $x_0 = 0,5$ м, $y_0 = 1$ м, а коэффициент трения между бруском и желобом $\mu = 0,3$. Ускорение свободного

падения примите равным $g = 10 \text{ м/с}^2$. Ответ округлите до одного знака после запятой.

II. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Заключительный этап олимпиады «Ломоносов» был назначен на 15 марта 2013 года. Для учащихся 7-х – 9-х классов он проходил в дистанционной форме по единому заданию, доступ к которому был открыт в течение 4 часов на сайте <http://distant.phys.msu.ru>. Для учащихся 10-х – 11-х классов заключительный этап проводился в очной форме на физическом факультете МГУ и на 12 региональных площадках в городах Барнаул, Брянск, Волгоград, Воронеж, Кемерово, Нальчик, Пермь, Саров, Таганрог, Уфа, Чебоксары и Челябинск. Задания были составлены в полном соответствии с Кодификатором элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для единого государственного экзамена 2013 года по физике и охватывали основные разделы Кодификатора, а именно, 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. Типовое задание состояло из четырех различных разделов, состоящих из кратких вопросов по теории и дополняющих их задач. В первом разделе были помещены задания по механике, во втором разделе – задания по молекулярной физике и термодинамике, в третьем разделе – задания по электродинамике, в четвертом разделе – задания по оптике.

Ниже приводятся примеры заданий заключительного этапа олимпиады «Ломоносов»

Задание для 7-х – 9-х классов

II.1. Два автобуса выехали с автостанции друг за другом с интервалом $\tau_1 = 10$ мин и, набрав за одно и тоже время скорость $v = 60$ км/ч, отправились в другой город. По дороге они обогнали движущегося в том же направлении велосипедиста. Какова скорость велосипедиста u , если автобусы проехали мимо него с интервалом $\tau_2 = 15$ мин? Ответ приведите в км/ч, округлив до целых.

II.2. Античные монеты часто чеканились из электра – сплава золота и серебра. Археолог, найдя такую монету (рис. 20), взвесил её. Оказалось, что вес монеты в воде отличается от её веса в воздухе на $k = 8\%$. Какова массовая доля X золота в этой монете? Считайте, что плотности золота и серебра больше плотности воды в $n_1 = 20$ и $n_2 = 10$ раз соответственно. Ответ приведите в процентах, округлив до целых.



Рис. 20

II.3. В калориметр с водой влили одну ложку тёплой воды. В результате установившаяся в калориметре температура превысила на $\Delta t_1 = 5^\circ\text{C}$ первоначальную температуру. После вливания ещё одной ложки той же тёплой воды установившаяся температура увеличилась ещё на $\Delta t_2 = 3^\circ\text{C}$. Пренебрегая теплообменом калориметра и его содержимого с окружающими телами, определите, на какую величину Δt температура наливаемой в калориметр тёплой воды превышает первоначальную температуру калориметра с водой. Ответ приведите в градусах Цельсия, округлив до целых.

II.4. Отец с сыном стоят напротив плоского зеркала, закрепленного на вертикальной стене, причем нижний край зеркала находится у пола (рис. 21). Расстояние от зеркала до сына $l = 3$ м, а расстояние от зеркала до его отца $L = 6$ м. На каком минимальном расстоянии y от пола должен находиться верхний край зеркала, чтобы сын мог видеть в зеркале отца в полный рост? Расстояние от пола до уровня глаз сына $h = 1,2$ м, рост отца $H = 1,8$ м. Ответ приведите в метрах, округлив до одного знака после запятой.

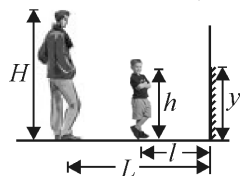


Рис. 21

Задание для 10-х – 11-х классов

II.5. Дайте определение угловой скорости точки при ее равномерном движении по окружности. Запишите формулу для вычисления ускорения точки при таком движении.

Задача. Свинцовый шар массой $m = 1$ кг, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити длиной $L = 1$ м в камере, из которой откачан воздух, движется по окружности в горизонтальной плоскости, совершая $n = 60$ оборотов в минуту. При этом нить всё время натянута. В некоторый момент времени в камеру впустили воздух. Какую работу A совершит сила сопротивления воздуха за время, в течение которого угловая скорость движения шара уменьшится в 2 раза? Считайте, что сила сопротивления достаточно мала. Размерами шара можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным $g = 9,8$ м/с².

II.6. Какие виды парообразования вы знаете? Что такое удельная теплота парообразования?

Задача. В сосуде находится влажный воздух. При изотермическом сжатии его объем уменьшился в 5 раз, а давление увеличилось в 3 раза. При дальнейшем изотермическом сжатии в 3 раза давление в итоге стало в 7 раз больше первоначального. Какую относительную влажность ϕ имел воздух до начала сжатия?

П.7. Как определяется модуль и направление вектора магнитной индукции? Что такое линии магнитной индукции?

Задача. Изображенный на рис. 22 электрический контур находится в магнитном поле с индукцией $B_0 = 1$ Тл, направленной по нормали к контуру. Площадь каждой половины контура $S = 0,1 \text{ м}^2$, сопротивления резисторов равны: $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 2,5$ Ом. Индукция магнитного поля уменьшается до нуля по закону $B = B_0 - \alpha t$, где $\alpha = 1$ Тл/с. Какое количество теплоты Q выделилось при этом на сопротивлении R_2 ?

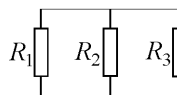


Рис. 22

П.8. Дайте определение светового луча. Сформулируйте законы отражения света.

Задача. Оптическая система состоит из призмы с малым преломляющим углом $\alpha = 0,05$ рад и линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см, в фокальной плоскости которой расположен экран (рис. 23). Левая грань призмы и экран перпендикулярны главной оптической оси линзы. Параллельный пучок света падает по нормали к левой грани призмы и собирается на экране в точке, находящейся на расстоянии $d = 0,5$ см от главной оптической оси линзы. Определите показатель преломления призмы n . При вычислениях используйте приближенные равенства $\sin \vartheta \approx \tan \vartheta \approx \vartheta$, где ϑ – малый угол, выраженный в радианах.

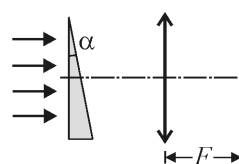


Рис. 23

ПРОФИЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН 2013

В 2013 профильный экзамен (дополнительное вступительное испытание) по физике в МГУ и в его Севастопольском филиале проводился в письменной форме. Типовое задание для абитуриента охватывало все основные разделы программы по физике для поступающих в МГУ: 1) механику, 2) молекулярную

физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. По каждому разделу программы абитуриенту предлагались краткий вопрос по теории и дополняющая его задача. На выполнение всего задания отводилось четыре астрономических часа. Ниже приводятся примеры заданий профильного экзамена.

I. Механика

I.1. Какие системы отсчета называются инерциальными? Сформулируйте первый закон Ньютона.

Задача. На плоскость, образующую с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$, положили брусок массой $M = 8$ кг и привязанный к нему лёгкой нерастяжимой нитью брусок массой $m = 4$ кг. При этом тяжёлый брусок расположили ниже лёгкого так, что нить оказалась слегка натянутой и расположенной в вертикальной плоскости, проходящей через центры масс брусков перпендикулярно линии пересечения наклонной плоскости и горизонтальной поверхности. После этого бруски одновременно отпустили без начальной скорости. Определите модули ускорений брусков, если коэффициент трения о плоскость бруска массой M равен $\mu_1 = 0,2$, а бруска массой m – равен $\mu_2 = 0,5$. Модуль ускорения свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

I.2. Дайте определение скорости материальной точки. Сформулируйте закон сложения скоростей.

Задача. На достаточно большой высоте над землей на гладкой горизонтальной подставке покоятся два тела малых размеров с массами $m_1 = 50$ г и $m_2 = 100$ г (рис. 24). Между телами расположена сжатая легкая пружина, связанная нитью. Известно, что энергия упругой деформации пружины равна $E_{\text{п}} = 67,5$ Дж. После пережигания нити пружина полностью распрямляется, тела разлетаются в разные стороны с горизонтально направленными скоростями и одновременно начинают падать с подставки. Определите, через какое время τ после начала падения скорости тел будут перпендикулярными друг другу. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

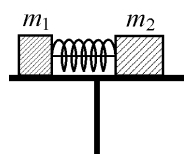


Рис. 24

1.3. Запишите выражения для потенциальной энергии тела вблизи поверхности Земли и потенциальной энергии упруго деформируемой пружины.

Задача. На горизонтальную площадку поставили лёгкую пружину жесткостью $k = 100 \text{ Н/м}$, скреплённую с пластинами массами $m = 200 \text{ г}$ каждая так, как показано на рис. 25. Затем на верхнюю пластину положили груз массой M так, что ось пружины осталась вертикальной. После этого резким ударом в горизонтальном направлении груз сбросили с пластины. Пренебрегая трением груза о пластину, определите массу груза M , если в тот момент, когда нижняя пластина перестала давить на стол, модуль скорости верхней пластины стал равным $v = 2 \text{ м/с}$. Модуль ускорения свободного падения примите равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

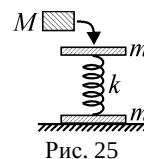


Рис. 25

II. Молекулярная физика и термодинамика

II.1. Какой газ называется идеальным? Запишите основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа и объясните смысл входящих в это уравнение величин.

Задача. В вертикально расположенном закрытом цилиндрическом сосуде под подвижным поршнем массой $m = 4 \text{ кг}$ находится один моль идеального одноатомного газа. В пространстве над поршнем создан вакуум. На какую величину Δh передвинется поршень при медленной передаче газу количества теплоты $Q = 10 \text{ Дж}$? Ускорение свободного падения примите равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

II.2. Сформулируйте основные положения молекулярно-кинетической теории. Каковы по порядку величины масса и размеры молекул?

Задача. Давление p и объем V идеального газа циклически изменяют в соответствии с pV -диаграммой, показанной на рис. 26. Известно, что работа газа на участке $1 - 2$ в $n = 2$ раза больше, чем модуль работы газа на участке $3 - 1$. Определите отношение k максимальной и минимальной абсолютных температур газа в этом цикле.

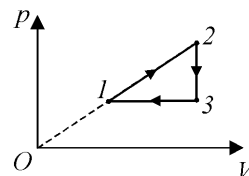


Рис. 26

II.3. Дайте определение идеального газа. Запишите основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа.

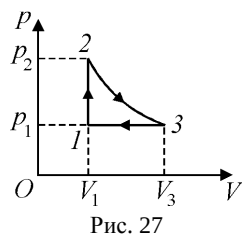


Рис. 27

Задача. С одним молем идеального одноатомного газа проводят циклический процесс, pV -диаграмма которого представлена на рис. 27, где 2 – 3 – изотермическое расширение. Найдите количество теплоты Q , которое выделяется на тех участках процесса, где газ охлаждается. При расчетах примите $p_1 = 10^5$ Па, $p_2 = 2 \cdot 10^5$ Па, $V_1 = 0,025$ м³.

III. Электродинамика

III.1. Что такое элементарный электрический заряд? Сформулируйте закон сохранения электрического заряда.

Задача. В вершинах правильного шестиугольника расположены шесть одинаковых маленьких шариков, имеющих заряд q каждый. Какой точечный заряд Q нужно поместить в центр шестиугольника, чтобы вся система заряженных тел находилась в равновесии?

III.2. Дайте определение потенциала электростатического поля. Как связана разность потенциалов с напряженностью однородного электростатического поля?

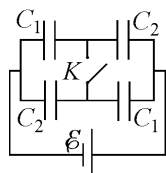


Рис. 28

Задача. Схема, изображенная на рис.28, состоит из четырех конденсаторов, источника постоянного напряжения и ключа K . Найдите отношение n электростатической энергии, запасенной в конденсаторах после замыкания ключа K , к энергии, запасенной в конденсаторах до замыкания ключа, если $C_2 = 2C_1$.

III.3. Дайте определение электрического сопротивления проводника. Чему равно сопротивление последовательно и параллельно соединенных проводников?

Задача. Квадратная рамка $ACDE$ из тонкого медного провода помещена в сильное однородное магнитное поле, индукция которого $\vec{B}$ перпенди-

кулярна плоскости рамки. В точках A и C к рамке подключён источник постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E}$ (рис. 29). Во сколько раз n изменится модуль силы Ампера, действующей на рамку, если подключить её к этому же источнику в точках A и D ? Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь. Силу Ампера, действующую на источник и подводящие провода, не учитывайте.

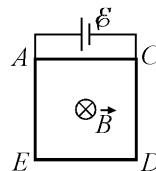


Рис. 29

IV. Оптика

IV.1. Сформулируйте законы отражения света. Приведите пример построения изображения предмета в плоском зеркале.

Задача. Стеклоплатная тарелка имеет дно сферической формы радиуса $R = 20$ см. В тарелку налили воду. На поверхность воды по нормали к ней направили луч света так, что точка падения луча оказалась на расстоянии $a = 5$ мм от центра водной поверхности. Показатель преломления воды $n = 1,33$. Под каким углом φ к вертикали выйдет из воды в воздух отраженный от дна тарелки луч света? При расчетах учтите, что для малых значений аргумента α , заданного в радианной мере, справедливо приближенное равенство $\arcsin \alpha \approx \alpha$.

IV.2. Какие линзы называют тонкими? Дайте определения фокусного расстояния и оптической силы тонкой линзы.

Задача. На главной оптической оси тонкой собирающей линзы на расстоянии $d = 20$ см от линзы слева от нее расположен точечный источник света. Справа от линзы помещена посеребренная сфера радиуса $R = 10$ см. Центр сферы находится на расстоянии $f = 30$ см от линзы на её главной оптической оси. Определите фокусное расстояние линзы F , при котором изображение источника, создаваемое этой оптической системой, будет совпадать с самим источником.

IV.3. Сформулируйте закон прямолинейного распространения света. Дайте определение светового луча.

Задача. В круглое отверстие в непрозрачной ширме вставлена тонкая рассеивающая линза, радиус которой совпадает с радиусом отверстия $R = 1$ см. Если перед линзой на её главной оптической оси поместить

точечный источник света, то на экране, находящемся по другую сторону от линзы на расстоянии $b = 20$ см, появится светлое пятно радиуса $r_1 = 4$ см. Если же, не трогая экран и источник, убрать линзу, то радиус пятна станет равным $r_2 = 2$ см. Определите оптическую силу D линзы.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ – 2013»

І. ЗАОЧНЫЙ ТУР

Задание для 7-х – 9-х классов

І.1. Пусть L – длина вагона электрички. Тогда время, за которое помощник машиниста первой электрички добежал до конца первого вагона, $t = \frac{L}{u}$. Вторая электричка, двигаясь относительно первой со скоростью $v_1 + v_2$, за это время сместилась относительно нее на расстояние $s = (N+1)L$. Поэтому $t = \frac{(N+1)L}{v_1 + v_2}$. Из записанных соотношений следует равенство $\frac{L}{u} = \frac{(N+1)L}{v_1 + v_2}$, откуда $v_2 = (N+1)u - v_1$.

Ответ: $v_2 = (N+1)u - v_1 = 15$ м/с.

І.2. Определить номер мешка с фальшивыми монетами одним взвешиванием можно следующим способом. Занумеровав мешки, надо взять из первого мешка 1 монету, из второго – 2, из третьего – 3, и так далее до девятого мешка. Взвесив набранные монеты (их будет $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$ штук), надо определить «дефицит» массы в граммах $\Delta M = 12 \cdot 45 - M = 540 - M$. Здесь M – масса отобранных 45 монет, найденная взвешиванием. Ясно, что номер искомого мешка $n = \frac{\Delta M}{0,42}$, причем из-за наличия погрешности измерения массы результат надо будет округлить до целого. Если $\Delta M = 0$, то фальшивые монеты нахо-

дятся в десятом мешке. Заметим, что с точки зрения минимальности верхней границы диапазона весов этот алгоритм – самый выгодный. Таким образом, весы должны позволять взвешивать грузы до 540 г, т.е. требуемое «минимальное кратное 100 значение верхней границы диапазона масс» $M_{\min} = 600$ г. Погрешность определения массы должна быть такова, чтобы позволить гарантированно отличить, например, 540 г от $540 - 0,42 = 539,58$ г, то есть не должна превышать половины разности между ними: $\delta M < 0,21$ г. Поэтому максимальное допустимое значение погрешности, кратное 100, равно $\delta M_{\max} = 200$ мг.

Ответ: $M_{\min} = 600$ г; $\delta M_{\max} = 200$ мг.

Замечание. Можно понять второй вопрос задачи несколько иначе, а именно, можно считать, что он задан независимо от первого. Тогда можно обойтись весами с гораздо худшей точностью, но более широким интервалом допустимых масс. Наименее строгие требования к точности получатся, если из первого мешка взять 111 монет, из второго – 222, и т.д. до девятого (999 монет). Всего придется взвешивать 4995 монет, и понадобятся весы с диапазоном до 60 кг! Но зато допустимая ошибка взвешивания должна быть меньше половины от разности масс 111 настоящих и фальшивых монет, то есть 23300 мг). Итак, возможный вариант ответа: $M_{\min} = 600$ г; $\delta M_{\max} = 23300$ мг.

I.3. Обозначим деформацию пружины в состоянии, при котором вода налита до самого края мензурки, через x . Масса налитой воды равна $m = \rho S \left(\frac{H}{2} + x \right)$. Вес налитой воды mg уравнивается силой упругости пружины kx . Таким образом, справедливо равенство $\rho S \left(\frac{H}{2} + x \right) g = kx$. Отсюда $x = \frac{\rho S H g}{2(k - \rho S g)}$ и $m = \frac{k}{k - \rho S g} \cdot \frac{\rho S H}{2}$.

Ответ: $m = \frac{k}{k - \rho S g} \cdot \frac{\rho S H}{2} = 56$ г.

I.4. Так как в начальном состоянии на стенках были капли воды, то пар под поршнем был насыщенным, и его давление равнялось $p_0 \approx 10^5$ Па. После помещения льда в объем под поршнем лед сразу же начал таять, поглощая теплоту, которая выделялась за счет конденсации части пара. Так как давление, создаваемое поршнем, неизменно, то в

равновесном процессе неизменны температура и плотность пара, остающегося насыщенным. Значит, объем пара уменьшался – поршень действительно опускался. Поршень остановился, когда весь лед растаял, а образовавшаяся вода нагрелась до равновесной температуры $t_0 = 100^\circ\text{C}$. Пренебрегая изменением объема конденсированных (жидкой и твердой) фаз, будем считать, что объем пара уменьшился на Sx , где x – смещение поршня. Из уравнения теплового баланса $r\rho_0 Sx = m[\lambda + c(t_0 - t_1)]$ следует, что $x = \frac{m[\lambda + c(t_0 - t_1)]}{r\rho_0 S}$.

Отметим, что опускающийся поршень совершает над содержимым цилиндра работу $A = p_0 Sx \approx 52,8$ Дж. В уравнении теплового баланса эта работа уже учтена в стоящем слева выражении, поскольку удельная теплота парообразования определяется как количество теплоты, идущее на испарение единицы массы жидкости при неизменной температуре $t_0 = 100^\circ\text{C}$, а при таком условии испарение обязательно сопровождается расширением образовавшегося пара, который совершает работу. С другой стороны, поскольку содержимое цилиндра теплоизолировано, то эта работа идет на увеличение его внутренней энергии (температура неизменна, так что кинетическая энергия всех молекул воды не изменяется, но изменяется потенциальная энергия их взаимодействия при переходе из одной фазы в другую). Поэтому изменение внутренней энергии $\Delta U = +A$.

Ответ: $x = \frac{m[\lambda + c(t_0 - t_1)]}{r\rho_0 S} \approx 13$ мм; $\Delta U = p_0 Sx \approx 53$ Дж.

1.5. Поскольку оба снаряда попали точно в цель, то дальность их полета одинакова и равна L . Учитывая, что на Луне нет атмосферы, применим формулу для дальности полета тела, брошенного под углом к горизонту: $L = \frac{v_1^2}{g} \sin(2\alpha_1) = \frac{v_2^2}{g} \sin(2\alpha_2)$, где g – ускорение свободного падения на Луне. Поскольку при заданных углах $\sin(2\alpha_1) = \sin(2\alpha_2)$, то скорости вылета снарядов одинаковы, т.е. $v_1 = v_2 \equiv v$. Для изучения относительного движения снарядов перейдем в систему отсчета, связанную с первым снарядом. В ней первый снаряд покоится, а второй движется равномерно прямолинейно, поскольку относительное ускоре-

ние снарядов равно нулю. Скорость относительного движения можно определить по начальному моменту времени, так как скорость второго снаряда относительно первого $\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ (рис. 30). Построив треугольник векторов скоростей, можно заметить, что этот треугольник прямоугольный равнобедренный, поэтому острые углы в нем равны 45° , и угол наклона скорости $\vec{v}'_2$ к

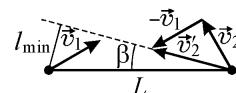


Рис. 30

горизонту $\beta = \alpha_2 - 45^\circ = 15^\circ$. Следовательно, $l_{\min} = L \sin \beta = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} L$.

Ответ: $l_{\min} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} L \approx 999 \text{ м.}$

I.6. Яркость свечения всех ламп не зависит от сопротивления реостата только в том случае, если ток через реостат не течет, т.е. если в обеих параллельных ветвях с резистором и лампами напряжение источника делится в одинаковой пропорции. Значит, $\frac{R}{R_A} = \frac{R_B}{R_C}$, где R_A , R_B , R_C –

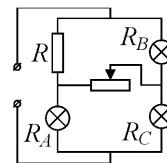


Рис. 31

сопротивления соответствующих ламп, которые могут принимать значения R_1 или R_2 (рис. 31). Так как лампы рассчитаны на одинаковое номинальное напряжение, то их мощности связаны с сопротивлениями соотношением $N_{1,2} = \frac{U^2}{R_{1,2}}$, откуда следует,

что $\frac{R_2}{R_1} = \frac{N_1}{N_2} = 1,5$. Рассмотрим три возможных случая подключения ламп.

1) Обе лампы с сопротивлением R_1 находятся в правой ветви, т.е.

$R_B = R_C = R_1$. Тогда $R_A = R_2 = R = 36 \text{ Ом}$, а $R_1 = \frac{2}{3} R_2 = 24 \text{ Ом}$.

2) Лампы с сопротивлением R_1 находятся в нижней части левой и правой ветвей. Тогда $R_A = R_C = R_1$, $R_B = R_2 = R = 36 \text{ Ом}$ и снова $R_1 = \frac{2}{3} R_2 = 24 \text{ Ом}$.

3) Лампы с сопротивлением R_1 находятся в нижней части левой и в верхней части правой ветвей. В этом случае $R_A = R_B = R_1$, $R_C = R_2$ и $RR_2 = R_1^2$, откуда $R_1 = 1,5 \cdot R = 54 \text{ Ом}$, а $R_2 = 1,5 \cdot R_1 = 81 \text{ Ом}$.
Как видно, получаются два варианта ответа: $R_1 = 24 \text{ Ом}$, $R_2 = 36 \text{ Ом}$ и $R_1 = 54 \text{ Ом}$, $R_2 = 81 \text{ Ом}$.
Ответ: $R_1 = 24 \text{ Ом}$, $R_2 = 36 \text{ Ом}$; $R_1 = 54 \text{ Ом}$, $R_2 = 81 \text{ Ом}$.

I.7. Пусть a_1 и a_2 – ускорения грузов относительно Земли, а a – ускорение оси блока в проекции на ось OX . Из нерастяжимости нити следует равенство $a_2 - a = a - a_1$, откуда $a = \frac{a_1 + a_2}{2}$. Согласно второму закону Ньютона уравнения движения грузов имеют вид
$$ma_1 = mg - T, \quad 3ma_2 = 3mg - T,$$
где T – натяжение нити. Исключая из этих уравнений T , приходим к равенству $3a_2 - a_1 = 2g$. Кроме того, по условию $\frac{|a_2|}{|a_1|} = 2$, или $\frac{1}{2}$. Следовательно, возможны четыре случая.

1) $a_2 = 2a_1$. Тогда $a_1 = \frac{2}{5}g$, $a_2 = \frac{4}{5}g$ и $a = \frac{3}{5}g \approx 5,88 \text{ м/с}^2$.

2) $a_2 = -2a_1$. Тогда $a_1 = -\frac{2}{7}g$, $a_2 = \frac{4}{7}g$ и $a = \frac{1}{7}g \approx 1,40 \text{ м/с}^2$.

3) $a_2 = \frac{1}{2}a_1$. Тогда $a_1 = 4g$, $a_2 = 2g$. Отметим, что этот случай невозможен, так как он соответствует отрицательной величине T , чего быть не может, так как нить не может «подталкивать» грузы. На самом деле при движении оси блока вниз с ускорением $a \geq g$ нить провисает, и оба груза падают с ускорением g .

4) $a_2 = -\frac{1}{2}a_1$. Тогда $a_1 = -\frac{4}{5}g$, $a_2 = \frac{2}{5}g$ и $a = -\frac{1}{5}g \approx -1,96 \text{ м/с}^2$.

В этом случае ось блока надо тянуть вверх.
Итак, существуют три варианта ответа.

Ответ: $a = -1,96 \text{ м/с}^2$; $a = 1,40 \text{ м/с}^2$; $a = 5,88 \text{ м/с}^2$.

Задание для 10-х – 11-х классов

1.8. Поскольку оба снаряда попали точно в цель, то дальность их полета одинакова и равна L . Учитывая, что на Луне нет атмосферы, применим формулу для дальности полета тела, брошенного под углом к горизонту:

$$L = \frac{v_1^2}{g} \sin(2\alpha_1) = \frac{v_2^2}{g} \sin(2\alpha_2), \text{ где } g - \text{ускорение}$$

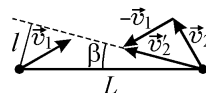


Рис. 32

свободного падения на Луне. Поскольку скорости вылета снарядов одинаковы, т.е. $v_1 = v_2 \equiv v$, то $\sin(2\alpha_1) = \sin(2\alpha_2)$, откуда $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2$. Для

определенности считаем «вторым» больший угол, при этом заметим, что углы вылета не могут быть равными, иначе снаряды столкнутся. Для изучения относительного движения снарядов перейдем в систему отсчета, связанную с первым снарядом. В ней первый снаряд покоится, а второй движется равномерно прямолинейно, поскольку относительное ускорение снарядов равно нулю. Скорость относительного движения можно определить по начальному моменту времени, так как скорость второго снаряда относительно первого $\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ (рис. 32). Построив треугольник векторов скоростей, можно заметить, что этот треугольник прямоугольный равнобедренный, поэтому острые углы в нем равны 45° , и угол наклона скорости $\vec{v}'_2$ к горизонту $\beta = \alpha_2 - \frac{\pi}{4}$. Из рис. 32 видно,

что $\sin \beta = \frac{l}{L}$. Следовательно, $\alpha_2 = \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{l}{L}\right)$, и $\alpha_1 = \frac{\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{l}{L}\right)$.

$$\text{Таким образом, } v^2 = \frac{gL}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - 2\beta\right]} = \frac{gL}{\cos 2\beta} = \frac{gL}{1 - 2\sin^2 \beta} = \frac{gL^3}{L^2 - 2l^2}.$$

$$\text{Ответ: } v = L \sqrt{\frac{gL}{L^2 - 2l^2}} \approx 77 \text{ м/с.}$$

1.9. Ясно, что для достижения максимальной температуры надо использовать всю «горячую» воду и сливать максимальное количество «холодной». Пусть в первый раз мы доливаем xV_2 горячей воды. Тогда температура смеси, образовавшейся в первом сосуде (с учетом того, что

$V_1 = V_2$), станет равной $t'_1 = \frac{t_1 V_1 + t_2 \cdot x V_2}{V_1 + x V_2} = \frac{t_1 + x t_2}{1 + x}$. После этого нужно

слить воду до уровня трубочки. Так как по условию сосуд цилиндрический и вертикальный, трубочка тонкая и находится на середине высоты сосуда, и сосуд не наклоняют, то объем воды в нем снова уменьшится до 1 л. Затем нужно в этот сосуд долить оставшуюся горячую воду объемом $(1 - x) \cdot V_2$. После этого конечная температура воды в первом сосуде станет равной

$$t''_1 = \frac{1}{1 + 1 - x} \left[\frac{t_1 + x t_2}{1 + x} + (1 - x) t_2 \right] = \frac{t_1 + (1 + x - x^2) t_2}{(1 + x)(2 - x)} = t_2 - \frac{\Delta t}{(1 + x)(2 - x)},$$

где введено обозначение $\Delta t = t_2 - t_1$. Нетрудно заметить, что максимум t''_1 достигается при значении x , соответствующему максимуму знаменателя дроби, содержащей Δt , то есть максимуму функции $y(x) = (1 + x)(2 - x)$ при $x \in [0, 1]$. График этой функции представляет собой параболу, положение вершины которой $x_0 = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2}$.

Следовательно, максимальная достижимая температура $t_{\max} = t_2 - \frac{4}{9} \Delta t$.

Ответ: $t_{\max} = \frac{1}{9}(5t_2 + 4t_1) = 55^\circ\text{C}$.

1.10. При нормальном падении на переднюю грань клина луч не преломляется. При первом падении этого луча на заднюю грань клина угол падения $\alpha_1 = \alpha$. При этом луч частично преломится и выйдет из клина, частично отразится и упадет на переднюю грань, где тоже возникнет отраженный луч и так далее. Из рис. 33 видно, что при каждом следующем падении угол падения увеличивается на α : $\alpha_m = m \cdot \alpha$. Нечетные падения на заднюю грань могут давать преломленные лучи, которые и образуют светлые пятна на экране. Преломленные лучи исчезнут, когда угол падения на заднюю грань станет больше критического угла $\alpha_{\text{кр}}$ полного внутреннего отражения,

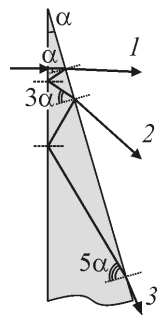


Рис. 33

удовлетворяющего условию $\sin \alpha_{\text{кр}} = \frac{1}{n}$, откуда $\alpha_{\text{кр}} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \approx 38,7^\circ$.

Углы $\alpha_1 = \alpha = 7^\circ$, $\alpha_3 = 3\alpha = 21^\circ$ и $\alpha_5 = 5\alpha = 35^\circ$ не превышают $\alpha_{\text{кр}}$, в то время как $\alpha_7 = 7\alpha = 49^\circ > \alpha_{\text{кр}}$. Таким образом, из задней грани клина выйдут только три преломленных луча, при четвертом падении на заднюю грань луч испытает полное внутреннее отражение.

Ответ: $k = 3$.

I.11. Пока ключ переключателя находился в положении 1, по контуру, состоящему из источника и двух резисторов, тек постоянный ток $I = \frac{\mathcal{E}}{2R}$, конденсаторы C_1 и C_2 были подключены к участкам с разностью потенциалов $U = IR = \frac{\mathcal{E}}{2}$, и были заряжены до зарядов $q_1 = C_1 \frac{\mathcal{E}}{2} = C\mathcal{E}$ и $q_2 = C_2 \frac{\mathcal{E}}{2} = \frac{C\mathcal{E}}{2}$. После перевода ключа в положение 2 начинается перезарядка образовавшейся батареи конденсаторов. Следует сразу заметить, что эту перезарядку нужно разделить на две стадии:

1) Очень быстрая стадия – «prestissimo». За времена, много меньшие постоянной времени $\tau_1 = 2CR$ разрядки конденсатора C_1 через резистор R_1 , заряд через резистор R_1 протечь не успевает, зато по проводам с очень малым сопротивлением успевают протечь заряды в ходе дозарядки батареи из трех конденсаторов. Заметим, что в этой батарее соединенные параллельно конденсаторы C_2 и

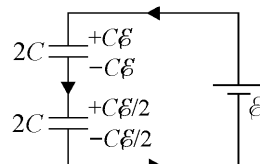


Рис. 34

C_3 эквивалентны конденсатору емкостью $C_{23} = 2C$, причем между ними заряд этой емкости распределяется поровну. На рис. 34 показаны начальные заряды конденсаторов и направление движения зарядов. Заряды перемещаются до того момента, пока сумма напряжений на конденсаторах не станет равной ЭДС. Имеем уравнение $\frac{C\mathcal{E} + \Delta q}{2C} + \frac{(C\mathcal{E}/2) + \Delta q}{2C} = \mathcal{E}$, из которого находим перемещенный заряд

$\Delta q = \frac{1}{4} C\mathcal{E}$. Следовательно, после очень быстрой стадии заряд конденсатора C_1 станет равным $q'_1 = \frac{5}{4} C\mathcal{E}$, а заряд конденсатора, образованного конденсаторами C_2 и C_3 – $q'_{23} = \frac{3}{4} C\mathcal{E}$. На этой стадии источник совершает работу, энергия теряется за счет выделения джоулева тепла в подводящих проводах и на внутреннем сопротивлении источника, возможно и за счет излучения электромагнитных волн, но ясно, что в резисторе R_1 на этой стадии теплота практически не выделяется.

2) медленная стадия – «adagio». На временах порядка $\tau_1 = 2CR$ через резистор R_1 протекают заряды в ходе полной разрядки закороченного этим резистором конденсатора C_1 ($q''_1 = 0$) и дозарядки конденсатора C_{23} до напряжения, равного ЭДС ($q''_{23} = 2C\mathcal{E}$). На этой стадии источник перемещает заряд $2C\mathcal{E} - \frac{3}{4}C\mathcal{E} = \frac{5}{4}C\mathcal{E}$, совершая работу $A = \frac{5}{4} C\mathcal{E}^2$. Изменение энергии конденсаторов равно $\Delta W_C = \frac{(2C\mathcal{E})^2}{4C} - \frac{(5C\mathcal{E}/4)^2}{4C} - \frac{(3C\mathcal{E}/4)^2}{4C} = \frac{15}{32} C\mathcal{E}^2$. Потерянная энергия – это и есть теплота, выделившаяся в резисторе R_1 : $Q = A - \Delta W_C = \frac{25}{32} C\mathcal{E}^2$.

Отметим, что этот ответ можно получить и другим способом. Если заметить, что в начале медленной стадии напряжение на резисторе R_1 равно $U_0 = \frac{5}{8} \mathcal{E}$, в конце оно падает до нуля, линейно уменьшаясь по мере протекания заряда, а полный протекший заряд, складывающийся из начального заряда конденсатора C_1 и заряда, перемещенного источником, $q = \frac{5}{2} C\mathcal{E}$, то можно посчитать работу электростатических сил

по перемещению заряда через резистор, равную выделившемуся количеству теплоты: $Q = \frac{U_0 + 0}{2} \cdot q = \frac{25}{32} C \mathcal{E}^2$.

Ответ: $Q = \frac{25}{32} C \mathcal{E}^2 = 0,09$ Дж.

I.12. В соответствии с уравнением состояния идеального газа $T = \frac{pV}{\nu R}$, его температура пропорциональна произведению давления на объем. Поэтому минимальная температура газа в цикле соответствует точке 1, а максимальная – точке 5 (рис. 35). Значит, $\frac{p_5 V_5}{p_1 V_1} = \frac{T_5}{T_1} = 16$. Кроме того, поскольку эти точки лежат на прямой, проходящей через начало координат, $\frac{p_5}{p_1} = \frac{V_5}{V_1}$, откуда $p_5 = 4p_1$, $V_5 = 4V_1$. Работа

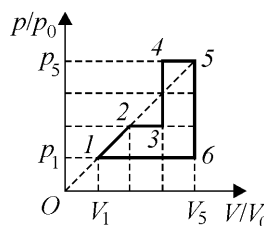


Рис. 35

газа в цикле вычисляется как площадь фигуры, ограниченной графиком цикла на pV -диаграмме. Поскольку «сапог» без изменения площади можно преобразовать в прямоугольный треугольник, то $A = \frac{1}{2}(p_5 - p_1)(V_5 - V_1) = \frac{9}{2} p_1 V_1$. Для рассматриваемого цикла удобнее вычислять не теплоту, полученную газом от нагревателя, а теплоту, отданную холодильнику. Так как рабочее тело отдает теплоту только в изохорном 5–6 и изобарном 6–1 процессах, $Q_x = -Q_{56} - Q_{61}$. С учетом величин теплоемкостей одноатомного идеального газа в таких процессах, и используя уравнение состояния, получим:

$$Q_x = \frac{3}{2} \nu R (T_5 - T_6) + \frac{5}{2} \nu R (T_6 - T_1) = \frac{3}{2} V_5 (p_5 - p_1) + \frac{5}{2} p_1 (V_5 - V_1) = \frac{51}{2} p_1 V_1.$$

Следовательно, КПД цикла $\eta = \frac{A}{A + Q_x} = \frac{9}{9 + 51} = 0,15$.

Ответ: $\eta = 15\%$.

I.13. В положении равновесия моменты сил упругости пружины и силы тяжести груза компенсируют друг друга. При малом смещении груза (можно считать, что он смещается по вертикали) на расстояние y ,

дополнительная к равновесной деформация пружины составит $\Delta l = \frac{L}{x} y$. Значит, $\Delta F_{\text{упр}} = -k \frac{L}{x} y$. Суммарный момент сил, действующих на штангу, относительно шарнира равен нулю т.к. штанга невесома. Поэтому на груз будет действовать сила $F = \frac{L}{x} \Delta F_{\text{упр}} = -k \left(\frac{L}{x} \right)^2 y$. Таким образом, уравнение малых вертикальных движений груза имеет вид $m\ddot{y} = -k \left(\frac{L}{x} \right)^2 y$, где точками обозначены производные по времени. Это уравнение описывает гармонические колебания с циклической частотой $\omega = \frac{L}{x} \sqrt{\frac{k}{m}}$. Таким образом, период колебаний $T(x) = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{x}{L} \sqrt{\frac{m}{k}}$ пропорционален координате груза. В итоге находим, что $\Delta T = T(x_1) - T(x_2) = 2\pi \frac{x_1 - x_2}{L} \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0,314 \text{ с}$.

Отметим, что эту задачу можно решить также из энергетических соображений. В самом деле, при малых смещениях груза по вертикали кинетическая энергия системы $E_k = \frac{m\dot{y}^2}{2}$, а потенциальная энергия, отсчитываемая от значения в положении равновесия, $E_n(y) = mgy + \frac{k(\Delta l_0 + \Delta l)^2}{2} - \frac{k(\Delta l_0)^2}{2} = \left(\frac{L}{x} \right)^2 \frac{ky^2}{2}$. Здесь $\Delta l_0 = -\frac{x}{L} \frac{mg}{k}$ – деформация пружины в положении равновесия. Квадратичность этих зависимостей от y и $\dot{y}$ указывает на то, что малые колебания являются гармоническими. Поэтому максимальные значения кинетической и потенциальной энергий совпадают. Имеем $\frac{m\dot{y}_{\text{max}}^2}{2} = \left(\frac{L}{x} \right)^2 \frac{ky_{\text{max}}^2}{2}$. Учитывая, что $\dot{y}_{\text{max}} = \omega \cdot y_{\text{max}}$, получаем равенство $\omega^2 y_{\text{max}}^2 = \left(\frac{L}{x} \right)^2 \frac{k}{m} y_{\text{max}}^2$. Отсюда $\omega = \frac{L}{x} \sqrt{\frac{k}{m}}$ и $T(x) = 2\pi \frac{x}{L} \sqrt{\frac{m}{k}}$.

Ответ: $\Delta T = 2\pi \frac{x_1 - x_2}{L} \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 314 \text{ мс.}$

I.14. Следует сразу подчеркнуть, что эта задача по уровню значительно выделяется на фоне всех остальных. Фактически ее решение – это исследование, требующее от участника наличия физической интуиции, хороших технических навыков в рамках программ профильного уровня и творческого подхода. Прежде всего, надо перечислить возможные способы нарушения равновесия палочки. Могут иметь место

- 1) отрыв палочки от поверхности;
- 2) продольное скольжение палочки по поверхности;
- 3) поперечное скольжение палочки по поверхности, сопровождающееся поворотом палочки.

Обозначим длину палочки через L , а ее массу через m . Заметим, что заданная в условии величина силы очевидно равна $F_0 = \mu mg$. Для каждого из перечисленных способов минимальная величина силы, необходимой для начала движения палочки, вычисляется отдельно.

1) Ясно, что для обеспечения максимального момента приложенной силы нужно тянуть палочку вертикально вверх за один из концов (рис. 36). В момент отрыва палочка опирается на поверхность только в одной точке, и суммарный момент силы $\vec{F}_1$ и силы тяжести приводит ее во вращение вокруг этой точки при любом сколь угодно малом увеличении

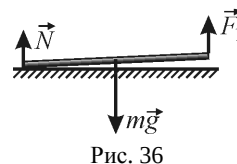


Рис. 36

F_1 . Имеем $F_1 \cdot L - mg \cdot \frac{L}{2} > 0$, откуда $F_1 > \frac{mg}{2} = \frac{F_0}{2\mu}$. Следовательно, для

этого способа нарушения равновесия минимальные величины сдвигающих сил для трех заданных значений коэффициента трения равны соответственно 3Н, 1,5 Н и 0,75 Н.

2) Можно ожидать, что сдвинуть палочку с места будет легче, если подействовать на палочку силой, лежащей в вертикальной плоскости, проходящей через палочку, и направленной под углом α к горизонту (рис. 37). В этом случае из условий равновесия находим, что

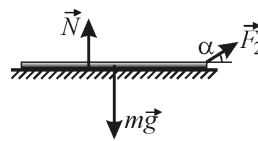


Рис. 37

$F_2 \cos \alpha = F_{\text{тр}} = \mu N$, $F_2 \sin \alpha + N = mg$, откуда $F_2 = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$. Для нахождения минимального значения этой силы введем вспомогательный угол α_0 , для которого $\sin \alpha_0 = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$, $\cos \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$, т.е. $\alpha_0 = \arctg \mu$. Тогда

$$F_2 = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2} [\cos(\alpha) \cdot \cos(\alpha_0) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha_0)]} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2} \cos(\alpha - \alpha_0)}.$$

Видно, что минимум этого выражения достигается при $\alpha = \alpha_0$. Значит,

$$F_2 = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{1+\mu^2}}, \text{ и для заданных значений коэффициента трения}$$

$F_2 \approx 2,23 \text{ Н}$, $1,87 \text{ Н}$ и $1,27 \text{ Н}$ соответственно.

3) Этот случай наиболее сложен, поэтому проведем его анализ в два этапа. Будем вначале считать, что сдвигающая палочку сила горизонтальна. Если линия действия прикладываемой силы не проходит через центр масс палочки, то после превышения «критической» величины силы палочка начнет поступательное и вращательное движение. В «критическом» состоянии силы трения на каждом участке палочки достигают максимального значения и направлены против начинающегося движения. Поэтому на части палочки силы трения будут сонаправлены с внешней силой (рис. 38, где точка C – мгновенный центр начинающегося вращения). В этом случае скольжение начнется при меньшем значении силы. Ясно, что выгоднее всего прикладывать силу к одному из концов палочки перпендикулярно ей, ибо именно в этом случае обеспечивается максимальный момент силы относительно центра масс палочки. Рассмотрим критическое состояние палочки при таком действии силы. Поскольку палочка прижимается к поверхности силой тяжести равномерно, то и силы трения распределены равномерно по площади соприкосновения. При поступательном движении $F_{\text{тр}}^{(\max)} = \mu mg$, так что для i -го элемента палочки длиной Δx имеем $\Delta F_{\text{три}} = \mu \Delta N_i = \mu mg \frac{\Delta x}{L}$.

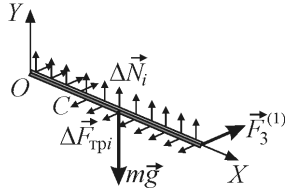


Рис. 38

Нетрудно заметить, что сила трения, действующая в критическом состоянии на часть палочки слева от точки C , равна $F_{\text{тр}}^{(1)} = \mu mg \frac{l}{L}$, где $l = |OC|$, а точка ее приложения – середина этой части. Аналогично, для силы трения, действующей на правую часть: $F_{\text{тр}}^{(2)} = \mu mg \frac{L-l}{L}$. Запишем условия равновесия в системе координат, показанной на рис. :

$$F + \mu mg \frac{l}{L} - \mu mg \frac{L-l}{L} = 0, \quad F(L-l) - \mu mg \frac{l}{L} \cdot \frac{l}{2} - \mu mg \frac{L-l}{L} \cdot \frac{L-l}{2} = 0.$$

Отсюда следуют равенства $F = \mu mg \frac{L-2l}{L}$, $2(L-2l)(L-l) = l^2 + (L-l)^2$,

или $l^2 - 2Ll + \frac{L^2}{2} = 0$. Из последнего уравнения определяем положение

точки C , а именно, $l = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}L$. Затем из первого уравнения находим

величину минимальной силы $F_3^{(1)} = (\sqrt{2}-1)\mu mg = (\sqrt{2}-1)F_0$.

Как можно заметить, для этого способа приведения палочки в движение минимальная величина сдвигающей силы одинакова для всех значений коэффициента трения и равна $F_3^{(0)} \approx 0,99$ Н. Видно, что это значение выгоднее предыдущих для двух величин коэффициента трения из трех.

Но на самом деле можно привести палочку в поперечное скольжение еще меньшей силой, если направить эту силу в плоскости, перпендикулярной палочке, под углом α к горизонту. Тогда нужно будет учесть, что при наличии вертикальной составляющей силы, приложенной к одному из концов палочки, нагрузка на поверхность и, как следствие, сила нормальной реакции поверхности, будет распределена вдоль палочки неравномерно. Начнем именно с анализа распределения сил реакции. Пусть x – координата, отсчитываемая вдоль палочки от конца O , дальнего от точки приложения силы $\vec{F}$ (рис. 39). Ясно, что в точке O палочка сильнее всего давит на поверхность, а ее конец, к которому приложе-

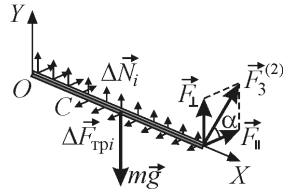


Рис. 39

на сила $\vec{F}$, давит слабее. Поэтому сила нормальной реакции ΔN_i , действующая на i -й элемент палочки малой длины Δx , линейно убывает с ростом x , т.е. $\Delta N_i = (a - bx_i)\Delta x$. Постоянные a и b определяются по величине суммарной силы реакции и ее момента из системы уравнений

$$\begin{cases} mg - F_{\perp} = N = \sum_i \Delta N_i = \int_0^L (a - bx)dx = aL - b\frac{L^2}{2}, \\ mg\frac{L}{2} - F_{\perp}L = M_N = \sum_i x_i \Delta N_i = \int_0^L (a - bx)x dx = a\frac{L^2}{2} - b\frac{L^3}{3}, \end{cases}$$

откуда $a = \frac{mg + 2F_{\perp}}{L}$, $b = \frac{6F_{\perp}}{L^2}$. Значит, $\Delta N(x) = \left[mg + 2F_{\perp} - 6F_{\perp} \frac{x}{L} \right] \frac{\Delta x}{L}$.

Нетрудно заметить, что это вычисление корректно только если $F_{\perp} \leq \frac{mg}{4}$, поскольку при бóльших величинах составляющей силы $F_{\perp} = F \sin \alpha$, поднимающей палочку, полученная формула дает отрицательные значения ΔN для некоторых x . Это означает, что при $F_{\perp} > \frac{mg}{4}$ возникает «зона отрыва» палочки от поверхности. Обозначив через $\bar{x}$ координату точки отрыва, имеем $\Delta N = c(\bar{x} - x) \geq 0$ для $0 \leq x \leq \bar{x}$, и $\Delta N \equiv 0$ для $\bar{x} < x \leq L$. В этом случае, решая систему уравнений

$$\begin{cases} mg - F_{\perp} = N = \sum_i \Delta N_i = \int_0^{\bar{x}} c(\bar{x} - x)dx = c\frac{\bar{x}^2}{2}, \\ mg\frac{L}{2} - F_{\perp}L = M_N = \sum_i x_i \Delta N_i = \int_0^{\bar{x}} c(\bar{x} - x)x dx = c\frac{\bar{x}^3}{6}, \end{cases}$$

получим, что $c = \frac{2(mg - F_{\perp})}{\bar{x}^2}$, $\bar{x} = \frac{3(mg - 2F_{\perp})}{2(mg - F_{\perp})}L$. Эти формулы работают

при $\frac{mg}{4} < F_{\perp} \leq \frac{mg}{2}$. Как мы выяснили ранее, при $F_{\perp} > \frac{mg}{2}$ вся палочка отрывается от поверхности, опираясь на нее только в точке O .

Перейдем к рассмотрению действия компоненты $F_{\parallel} = F \cos \alpha$.

Для определенности рассмотрим сначала случай $F_{\perp} \leq \frac{mg}{4}$. Имеем

$$\left\{ \begin{aligned} F_{\parallel} = -F_{\text{тр}} &= \int_l^L \mu(a - bx)dx - \int_0^l \mu(a - bx)dx = \\ &= \mu \left[mg - F_{\perp} - 2(mg + 2F_{\perp}) \frac{l}{L} + 6F_{\perp} \frac{l^2}{L^2} \right], \\ F_{\parallel} L = -M_{\text{тр}} &= \int_l^L \mu(a - bx)x dx - \int_0^l \mu(a - bx)x dx = \\ &= \mu L \left[\frac{mg}{2} - F_{\perp} - (mg + 2F_{\perp}) \frac{l^2}{L^2} + 4F_{\perp} \frac{l^3}{L^3} \right]. \end{aligned} \right.$$

Из этой системы уравнений определяются величина нарушающей покой палочки силы F и координата мгновенного центра вращения l при каждом значении α . Удобно ввести безразмерные величины

$$f = \frac{F}{F_0} = \frac{F}{\mu mg} \text{ и } z = \frac{l}{L}, \text{ уравнения для которых имеют вид}$$

$$\left\{ \begin{aligned} f[\cos \alpha + \mu \sin \alpha(1 + 4z - 6z^2)] &= 1 - 2z, \\ f[\cos \alpha + \mu \sin \alpha(1 + 2z^2 - 4z^3)] &= \frac{1 - 2z^2}{2}, \end{aligned} \right.$$

$$\text{или } \left\{ \begin{aligned} f &= \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{1 - 2z}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha(1 + 4z - 6z^2)}, \\ \frac{1 - 4z + 2z^2}{-1 + 8z - 12z^2 + 8z^3 - 4z^4} &= \mu \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \right.$$

Как видно, для z получается уравнение четвертой степени. Используя методику решений таких уравнений, можно получить аналитический ответ для $f(\mu, \alpha)$, но он получается очень громоздким и неудобным для анализа. Гораздо проще решать эту систему, например, графически: для заданного μ выбирать различные z из диапазона $z_1 < z < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, где

$z_1 \approx 0,16$ – корень уравнения $1 - 8z + 12z^2 - 8z^3 + 4z^4 = 0$, отвечающий

значению $\mu \operatorname{tg} \alpha = +\infty$, при этом $z = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ соответствует значению $\mu \operatorname{tg} \alpha = 0$.

Будем использовать следующую методику. Для каждого z из заданного диапазона подсчитываем по второй из приведенных выше формул значение α , а затем по первой формуле – соответствующее значение $f(\mu, \alpha)$. В результате получаем график зависимости силы от угла и выбираем ее минимальное значение. В таком исследовании можно эффективно использовать MS Excel (с функцией «формула в ячейке») или другие математические пакеты. При этом необходимо для каждой полученной точки вычислять величину $\frac{F_{\perp}}{mg} = \mu f \sin \alpha$, которая должна быть

меньше $\frac{1}{4}$. Это требование связано с тем, что мы проводили вычисления по формулам, отвечающим области $F_{\perp} \leq \frac{mg}{4}$. В противном случае придется вычислять все заново по аналогичным формулам для $\frac{mg}{4} < F_{\perp} \leq \frac{mg}{2}$, которые выглядят следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{1 - 4z + 2z^2}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha (1 + 4z - 6z^2)}, \\ \frac{4z^3 - 10z^2 + 8z - 1}{(1 - 6z^2 + 4z^3)(1 - 4z + 2z^2)} = \mu \operatorname{tg} \alpha. \end{array} \right.$$

Здесь $z = \frac{l}{x}$, причем $z_2 < z < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, где $z_2 \approx 0,15$ – корень уравнения $1 - 8z + 10z^2 - 4z^3 = 0$, отвечающий значению $\mu \operatorname{tg} \alpha = 0$. При этом $z = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ соответствует значению $\mu \operatorname{tg} \alpha = +\infty$. Как оказывается, для двух значений μ , а именно $\mu = 0,4$ и $\mu = 0,8$, минимум действительно относится к области $F_{\perp} \leq \frac{mg}{4}$, а для $\mu = 1,6$ – области $\frac{mg}{4} < F_{\perp} \leq \frac{mg}{2}$. В качестве примера приведем построенные по соответствующим форму-

лам графики зависимости f от переменной $y = \mu \operatorname{tg} \alpha$ при заданных значениях μ (рис. 40 – 42).

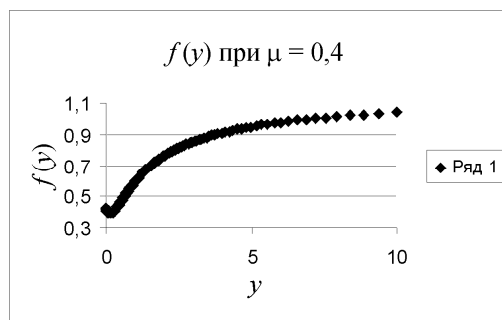


Рис. 40

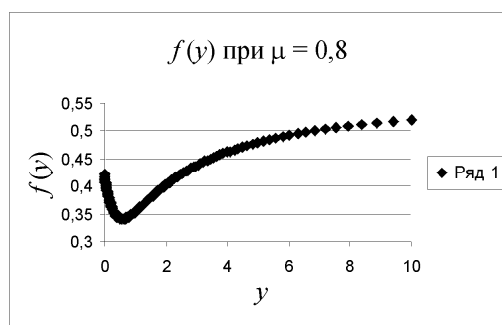


Рис. 41

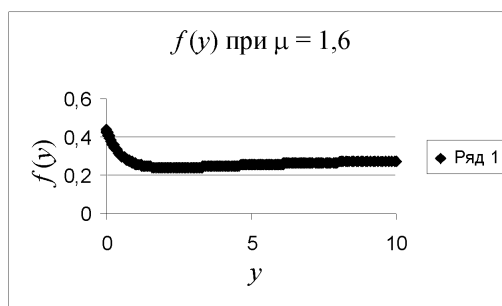


Рис. 42

Результаты проведенного анализа представлены в таблице.

μ	f	α
0,4	0,3936	19°
0,8	0,3410	35°
1,6	0,2399	54°

Таким образом, для поперечного скольжения минимальные значения силы, приводящей палочку в движение, для трех заданных значений коэффициента трения равны соответственно $F_3^{(2)} \approx 0,94$ Н, 0,82 Н и 0,58 Н. Эти значения и есть минимальные среди всех найденных!

Ответ: при $\mu = 0,4$ $F_{\min} = 0,94$ Н; при $\mu = 0,8$ $F_{\min} = 0,82$ Н; при $\mu = 1,6$ $F_{\min} = 0,58$ Н.

Замечание. Можно разобрать и самый общий случай, когда сила, приложенная к одному из концов палочки, не только составляет угол α с горизонтом, но и лежит в вертикальной плоскости, составляющей угол β с плоскостью, перпендикулярной палочке (выше разбирался случай $\beta = 0$). Тогда мгновенный центр вращения палочки в момент начала движения уже не лежит на ней, и его положение надо будет характеризовать двумя величинами, а именно, расстоянием от этого центра до прямой, проходящей через палочку $l_{\perp}$, и расстоянием от противоположного конца палочки до проекции центра на эту прямую $l_{\parallel}$. Условия равновесия при каждом наборе значений μ , α и β приводят к системе из трех трансцендентных алгебраических уравнений для трех величин: F , $l_{\parallel}$ и $l_{\perp}$. Эта система существенно сложнее разобранной выше, однако, используя ее, можно доказать, что для любых заданных μ и α точка $\beta = 0$ есть точка минимума функции $f(\mu, \alpha, \beta)$. Поэтому в действительности такой анализ не нужен. Отчасти это понятно и из физических соображений – для создания движения, являющегося комбинацией двух разных вариантов нарушения равновесия, требуется сила, не меньшая, чем для каждого из них по отдельности.

II. ОЧНЫЙ ТУР

Задание для 7-х – 9-х классов

II.1. Пусть L – длина удава, а v – его скорость. Тогда $t_1 = \frac{L}{v+u}$, а $t_2 = \frac{L}{2v}$. Исключая из этих соотношений v , находим $L = \frac{2t_1t_2}{2t_2-t_1}u$. Единица измерения «попугай» составляет величину $l \approx \frac{L}{38} = \frac{t_1t_2}{19(2t_2-t_1)}u = 0,225$ м. Следовательно, $n = \frac{1\text{м}}{l} \approx \frac{40}{9} \approx 4,44$.

Существует также второй (хоть и несколько менее реалистичный, по мнению методической комиссии олимпиады) вариант решения: если не придавать большого значения слову «встретил» в условии, то можно считать, что Попугай догонял неспешно ползущего Удава. В этом случае $t_1 = \frac{L}{u-v}$, и аналогичные вычисления дадут следующее значение

$$l \approx \frac{L}{38} = \frac{t_1t_2}{19(2t_2+t_1)}u \approx 0,08 \text{ м. Тогда } n = \frac{1\text{м}}{l} \approx \frac{112}{9} \approx 12,44.$$

Ответ: $n \approx 4,44$, или $n \approx 12,44$.

II.2. Исходя из условия, будем считать, что при растворении соли повышается плотность раствора и понижается средняя плотность соляного шара. Поскольку объем раствора не меняется и остается равным начальному объему воды V_0 , то при растворении части соли массой m плотность раствора станет равной $\rho_1 = \rho_0 + \frac{m}{V_0}$, где ρ_0 – плотность воды. Если начальная масса шара равна m_0 , то его новая масса станет равной $m_0 - m$, а новый объем – $\frac{V_0}{4} - \frac{m}{4\rho_0}$. Поэтому средняя плотность шара будет равной $\rho_2 = 4 \frac{m_0 - m}{\rho_0 V_0 - m} \rho_0$. Кроме того, поскольку по условию первоначально средняя плотность шара в два раза больше плотности воды, то $m_0 = 2\rho_0 \frac{V_0}{4}$, откуда следует, что $\rho_0 V_0 = 2m_0$. Таким обра-

зом, $\rho_1 = \rho_0 \left(1 + \frac{m}{2m_0} \right)$ и $\rho_2 = 4 \frac{m_0 - m}{2m_0 - m} \rho_0$. Шар всплывет, когда плотность раствора сравняется с его средней плотностью, т.е. при $\rho_1 = \rho_2$. Имеем $\frac{2m_0 + m}{2m_0} = \frac{4(m_0 - m)}{2m_0 - m}$, или $m^2 - 8m_0m + 4m_0^2 = 0$. При решении полученного квадратного уравнения учтем, что m очевидно должно быть меньше m_0 . Корень уравнения, удовлетворяющий этому условию, $m = (4 - 2\sqrt{3})m_0$. Время, необходимое для растворения такой массы соли, $\tau = \frac{m}{q} = (4 - 2\sqrt{3}) \frac{m_0}{q}$.

Ответ: $\tau = (4 - 2\sqrt{3}) \frac{m_0}{q} \approx 536$ с, т.е. около 9 минут.

П.3. Ясно, что температура капсулы остается постоянной в процессе замерзания воды, которая отдает энергию на испарение. Температура начнет понижаться, когда вся вода замерзнет. Далее откачка пара будет сопровождаться возгонкой – переходом молекул воды из твердой в газообразную фазу, и энергия на этот процесс будет забираться у остающихся молекул льда. Таким образом, если до указанного момента времени испарилась масса воды Δm из начальной массы m , то масса $m - \Delta m$ замерзла. Запишем уравнение теплового баланса $\lambda(m - \Delta m) = r\Delta m$, откуда $\Delta m = \frac{\lambda}{r + \lambda} m$. Значит, $n = \frac{m}{m - \Delta m} = \frac{r + \lambda}{r}$. Так как капсула по условию легкая, ее массой пренебрегаем.

Ответ: $n = \frac{r + \lambda}{r} \approx 1,14$.

П.4. Во-первых, следует обратить внимание на то, что сумма внешних сил, действующих на стержень с шариками, в состоянии равновесия равна нулю. При этом равна нулю и сумма сил, действующих на шарики со стороны электростатического поля. Следовательно, равна нулю сумма силы натяжения нити и сил тяжести, действующих на шарики: $\vec{T} + 2m\vec{g} = 0$. Таким образом, нить располагается вертикально и величина силы ее натяжения $T = 2mg$. Система занимает положение,

изображенное на рис. 43, где через $\vec{F}$ обозначена равнодействующая силы кулоновского притяжения шариков и силы реакции стержня.

Во-вторых, следует рассмотреть условие равновесия нижнего шарика. Пусть, например, этот шарик несет заряд $-q$. Для него сила $\vec{F}$, направленная вдоль стержня, уравнивает сумму вертикальной силы тяжести и горизонтальной силы, действующей со стороны электрического поля. Следовательно, в проекции на вертикальное и горизонтальное направления условия равновесия этого шарика имеют вид $F \cos \alpha = mg$, $F \sin \alpha = qE$, от-

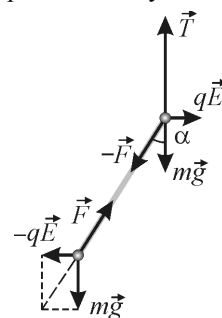


Рис. 43

куда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{qE}{mg}$. Это соотношение определяет угол наклона стержня к вертикали. Те участники, которые знакомы с обратными тригонометрическими функциями, могут записать ответ в виде $\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{qE}{mg} \right)$.

Ответ: $T = 2mg$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{qE}{mg}$.

Задание для 10-х – 11-х классов

Механика

П.5. Для описания движения тел будем использовать координатную систему, ось OX которой направлена горизонтально, а ось OY – вертикально. Проекции скоростей тел на оси этой системы подчиняются уравнениям $v_{1x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{1y} = v_0 \sin \alpha - gt$, $v_{2x} = v_0 \cos 2\alpha$, $v_{1y} = v_0 \sin 2\alpha - gt$. Так как в момент времени τ скорости тел сонаправ-

лены, то в этот момент справедливо равенство $\frac{v_{1y}(\tau)}{v_{1x}} = \frac{v_{2y}(\tau)}{v_{2x}}$, или $\frac{v_0 \sin \alpha - g\tau}{v_0 \cos \alpha} = \frac{v_0 \sin 2\alpha - g\tau}{v_0 \cos 2\alpha}$. Отсюда $\tau = \frac{v_0}{g} \cdot \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos 2\alpha}{\cos \alpha - \cos 2\alpha}$.

Используя тригонометрические формулы, это выражение можно упростить, приведя его к виду $\tau = \frac{v_0}{g} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \cos 2\alpha}$, или $\tau = \frac{v_0}{g} \cdot \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin(3\alpha/2)}$.

Ответ: $\tau = \frac{v_0}{g} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \cos 2\alpha} = \frac{v_0}{g} \cdot \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin(3\alpha/2)}$.

II.6. Обозначим через $\vec{v}_{01}$ и $\vec{v}_{02}$ векторы начальных скоростей камушков, а через $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ векторы скоростей камушков спустя время τ после начала движения, причем по условию $v_{10} = v_{20} = v_0$ и $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$. Согласно законам равнопеременного движения имеем $\vec{v}_1 = \vec{v}_{01} + \vec{g}\tau$, $\vec{v}_2 = \vec{v}_{02} + \vec{g}\tau$. Из рис. 44 видно, что

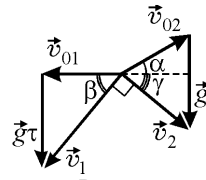


Рис. 44

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{g\tau}{v_0}, \quad \operatorname{ctg} \gamma = \frac{v_0 \cos \alpha}{g\tau - v_0 \sin \alpha}.$$

По условию

$\beta + \gamma = 90^\circ$, поэтому $\operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{tg} \beta$. Из записанных соотношений следует равенство $\frac{g\tau}{v_0} = \frac{v_0 \cos \alpha}{g\tau - v_0 \sin \alpha}$. Отсюда получаем квадратное уравнение

$$\tau^2 - \frac{v_0}{g} \sin \alpha - \frac{v_0^2}{g^2} \cos \alpha = 0.$$

Положительный корень этого уравнения равен $\tau = \frac{v_0}{2g} \left(\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 4 \cos \alpha} \right)$.

Ответ: $\tau = \frac{v_0}{2g} \left(\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 4 \cos \alpha} \right)$.

II.7. Из законов сохранения импульса и механической энергии следуют равенства $m_1 v_1 = m_2 v_2$, $\frac{k \Delta l^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$. Решая эту систему относительно скоростей v_1 и v_2 , получаем ответ.

Ответ: $v_1 = \Delta L \sqrt{\frac{m_2 k}{m_1(m_1 + m_2)}}$, $v_2 = \Delta L \sqrt{\frac{m_1 k}{m_2(m_1 + m_2)}}$.

II.8. Из закона сохранения импульса находим, что в результате попадания пули брусок с застрявшей пулей приобретет скорость

$$v = \frac{m}{M+m} v_0.$$

При дальнейшем движении бруска до первой остановки его кинетическая энергия полностью переходит в потенциальную энергию пружины и в теплоту за счет трения. Из закона изменения механической энергии

$$\frac{(M+m)v^2}{2} - \frac{kS^2}{2} = \mu(M+m)gS$$

с учетом выражения для скорости v получаем квадратное уравнение относительно S , а именно

$$S^2 + 2 \frac{\mu(M+m)g}{k} S - \frac{m^2 v_0^2}{(M+m)k} = 0.$$

Выбирая положительный корень,

находим
$$S = -\frac{\mu(M+m)g}{k} + \sqrt{\left(\frac{\mu(M+m)g}{k}\right)^2 + \frac{m^2 v_0^2}{(M+m)k}}.$$

Ответ:
$$S = -\frac{\mu(M+m)g}{k} + \sqrt{\left(\frac{\mu(M+m)g}{k}\right)^2 + \frac{m^2 v_0^2}{(M+m)k}}.$$

II.9. Обозначим через p_1 давление воздуха в трубке над ртутью при температуре T_0 . Тогда атмосферное давление $p_0 = p_1 + \rho g h_1$, где ρ – плотность ртути, g – ускорение свободного падения. При температуре T давление воздуха в трубке p_2 и атмосферное давление $p = p_2 + \rho g h$. Для описания состояния воздуха в трубке будем использовать уравнение Менделеева–Клапейрона, из которого следует равенство $\frac{p_1(l-h_1)}{T_0} = \frac{p_2(l-h)}{T}$. Объединяя записанные соотношения, находим,

что
$$p = \rho g h + (p_0 - \rho g h_1) \cdot \frac{l-h_1}{l-h} \cdot \frac{T}{T_0}.$$

Ответ:
$$p = \rho g h + (p_0 - \rho g h_1) \cdot \frac{l-h_1}{l-h} \cdot \frac{T}{T_0}.$$

II.10. Стержень находится в равновесии под действием сил, изображенных на рис. 45, где $\vec{F}_1$ – сила Архимеда, действующая на легкий шар, $\vec{F}_2$ – сила Архимеда, действующая на тяжелый шар, $\vec{P}$ – сила тя-

жести, действующая на тяжелый шар, $\vec{N}$ – сила реакции дна сосуда. Так шары одинаковые по объему, то $F_1 = (1-k)F_2$. Обозначив через l

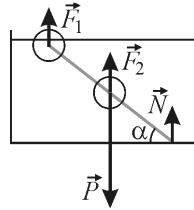


Рис. 45

длину стержня, а через α – угол, который стержень образует с горизонтом, из уравнения моментов относительно оси, проходящей через центр тяжелого шара, получаем, что $N \frac{l}{2} \cos \alpha = F_1 \frac{l}{2} \cos \alpha$, откуда

$N = F_1 = (1-k)F_2$. Сумма сил, действующих на систему, равна нулю, т.е. $F_1 + F_2 + N - P = 0$. Из записанных равенств следует, что

$P = F_2 + 2(1-k)F_2 = (3-2k)F_2$. Максимальная величина выталкивающей силы на глубоком месте достигается, когда легкий шар полностью погружен в воду. В этом случае она равна $2F_2$. Поэтому система будет плавать, если $P < 2F_2$. Итак, $(3-2k)F < 2F_2$, откуда $k > \frac{1}{2}$.

Ответ: $k > \frac{1}{2}$.

II.11. Железный шарик, помещенный в магнитное поле, находится в равновесии под действием сил, изображенных на рис. 46. При этом модуль силы натяжения нити N равен модулю векторной суммы магнитной силы $\vec{F}$ и силы тяжести $m\vec{g}$, т.е.

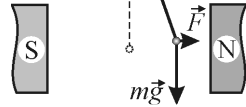


Рис. 46

$N = \sqrt{F^2 + (mg)^2}$. Если пережечь нить, то предоставленный самому себе шарик будет двигаться под углом ϕ_0 к вертикали с ускорением, модуль которого $g' = \frac{1}{m} \sqrt{F^2 + (mg)^2}$. Следовательно, g' – это модуль ускорения свободного падения шарика в присутствии магнитного поля.

По формуле Гюйгенса для периода малых колебаний математического маятника длиной l имеем $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g'}}$. Используя найденное

выше выражение для g' , после несложных преобразований находим,

$$\text{что } F = mg \sqrt{\left(\frac{T_0}{T}\right)^4 - 1}.$$

$$\text{Ответ: } F = mg \sqrt{\left(\frac{T_0}{T}\right)^4 - 1}.$$

Молекулярная физика и термодинамика

П.12. В результате остановки сосуда скорость каждой молекулы гелия относительно сосуда станет равной $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{v}_0$, где $\vec{v}$ – ее скорость относительно сосуда до остановки. Поэтому средняя кинетическая энергия молекул гелия примет значение $\overline{E_k} = \overline{\left(\frac{m_0 \vec{v}'^2}{2}\right)} =$

$$= \frac{m_0 \overline{\vec{v}'^2}}{2} = \frac{m_0 v_0^2}{2} + \frac{m_0 \overline{v^2}}{2} + m_0 \overline{(\vec{v}_0 \vec{v})}, \text{ где } m_0 \text{ – масса молекулы гелия, черта}$$

означает усреднение по ансамблю молекул, а круглые скобки – скалярное произведение векторов. Учитывая, что в начальном состоянии скорости молекул ориентированы по отношению к $\vec{v}_0$ хаотически, получаем, что $\overline{(\vec{v}_0 \vec{v})} = 0$. Поскольку теплообмен со стенками сосуда пренебрежимо мал, то в процессе установления теплового равновесия в сосуда средняя кинетическая энергия молекул не изменяется. С учетом того,

что гелий – одноатомный газ, имеем $\frac{m_0 \overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2} kT$, $\frac{m_0 \overline{\vec{v}'^2}}{2} = \frac{3}{2} kT'$, где

k – постоянная Больцмана, T – первоначальная температура гелия, T' – установившаяся температура гелия после остановки сосуда. Таким образом,

$T' = T + \frac{m_0 v_0^2}{3k}$. Поскольку $\frac{m_0}{k} = \frac{M}{R}$, то приращение температуры гелия $\Delta T = T' - T$ после остановки сосуда можно представить в виде

$$\Delta T = \frac{M v_0^2}{3R}, \text{ где } M \text{ – молярная масса гелия, } R \text{ – универсальная газовая}$$

постоянная. Из уравнения Менделеева–Клапейрона с учетом того, что

объем гелия не изменяется, следует равенство $V\Delta p = \frac{m}{M}R\Delta T$. Объединяя записанные выражения, находим $\Delta p = \frac{mv_0^2}{3V}$.

Ответ: $\Delta p = \frac{mv_0^2}{3V} = 25$ кПа.

П.13. При резкой остановке сосуда кинетическая энергия направленного движения молекул гелия $\frac{vMv^2}{2}$ перейдет в энергию хаотического движения этих молекул, то есть пойдет на приращение внутренней энергии газа $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T$, где ν – число молей гелия. Из равенства

$$\frac{vMv^2}{2} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T \text{ находим, что } v = \sqrt{\frac{3R\Delta T}{M}}.$$

Ответ: $v = \sqrt{\frac{3R\Delta T}{M}} \approx 250$ м/с.

П.14. В начальном состоянии энергия системы равна внутренней энергии газа U . Когда поршень отпустили, под действием давления газа он начал двигаться вправо и сжимать пружину. Поршень прошел по инерции положение равновесия, а сжатая пружина после остановки поршня стала толкать его обратно. В системе возникли затухающие колебания и из-за наличия трения поршень остановился. В процессе колебаний механическая энергия поршня из-за трения превратилась в тепло, т.е. пошла на увеличение внутренней энергии газа. При этом изменением внутренней энергии поршня, пружины и цилиндра мы пренебрегаем из-за их малой теплоемкости. Так как теплообмен с окружающей средой отсутствует, то закон сохранения энергии имеет вид

$$\Delta U + \frac{kx^2}{2} = 0, \text{ где } k - \text{ жесткость пружины, а } x - \text{ установившееся смещение поршня.}$$

Изменение внутренней энергии газа при изменении его температуры от T_1 до T_2 равно $\Delta U = \nu C_V(T_2 - T_1)$, где ν – число молей газа, C_V – молярная теплоемкость при постоянном объеме. В положении равновесия сила давления газа на поршень площадью S равна

$p_2 S = kx$. Смещение поршня $x = \frac{\Delta V}{S}$, где $\Delta V = V_2 - V_1$ – изменение объема газа. Следовательно, справедливо равенство $\nu C_V (T_2 - T_1) = \frac{k(V_2 - V_1)^2}{2S^2}$. Из уравнения Менделеева–Клапейрона давление газа $p_2 = \frac{\nu R T_2}{V_2}$, а из уравнения равновесия поршня $p_2 = \frac{kx}{S} = \frac{k(V_2 - V_1)}{S^2}$. Отсюда $\frac{\nu R T_2}{V_2} = \frac{k(V_2 - V_1)}{S^2}$. Используя полученные выше соотношения, найдем отношение температур $\frac{T_1}{T_2} = 1 + \frac{R}{2C_V} \left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right)$ и давлений $\frac{p_1}{p_2} = \frac{R}{2C_V} \left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right) + \frac{V_2}{V_1}$. Учитывая, что для идеального одноатомного газа $C_V = \frac{3}{2}R$, а по условию $\frac{V_2}{V_1} = 2$, окончательно получаем: $\frac{T_2}{T_1} = \frac{6}{7}$, $\frac{p_2}{p_1} = \frac{3}{7}$.

Ответ: $m = \frac{6}{7}$; $n = \frac{3}{7}$.

II.15. Поскольку электрическое поле однородно, сила притяжения между поршнем и дном цилиндра не зависит от положения поршня. Поэтому давление p газа во время опыта постоянно, в том числе с учетом наружного атмосферного давления и веса поршня. Согласно первому закону термодинамики, $Q = \Delta U + A$, где $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R \Delta T$ – изменение внутренней энергии газа, $A = p \Delta V$ – работа, совершенная газом при перемещении поршня. Из уравнения Менделеева–Клапейрона следует, что в изобарном процессе $p \Delta V = \nu R \Delta T$. Таким образом, $Q = \frac{5}{2}\nu R \Delta T$.

Ответ: $\Delta T = \frac{2Q}{5\nu R}$.

II.16. Работа газа в циклическом процессе численно равна площади фигуры, ограниченной графиком процесса на pV -диаграмме

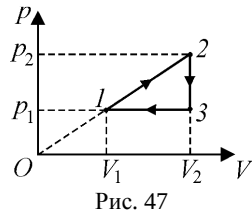


Рис. 47

(рис. 47): $A = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$. Используя уравнение Менделеева-Клапейрона и учитывая, что для точек 1 и 2, лежащих на прямой, проходящей через начало координат, справедливо равенство $\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}$, запишем выражение для работы

газа в цикле в виде: $A = \frac{1}{2}\nu R(T_2 - 2T_3 + T_1)$, где ν – число молей газа, R – универсальная газовая постоянная, T_i – абсолютная температура газа в точке i ($i=1, 2, 3$). Из равенств $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_3}$ и $\frac{p_2}{T_3} = \frac{p_1}{T_1}$ находим, что

$T_3 = \sqrt{T_1 T_2}$. Учитывая это равенство, приведем выражение для работы

газа к виду $A = \frac{1}{2}\nu R(T_1 - 2\sqrt{T_1 T_2} + T_2)$. Количество теплоты, полученной

газом в цикле, $Q_n = Q_{1-2} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = 2\nu R(T_2 - T_1)$. Коэффициент полезного действия цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_n} = \frac{T_1 - 2\sqrt{T_1 T_2} + T_2}{4(T_2 - T_1)} = \frac{\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}}{4(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})}.$$

Ответ: $\eta = \frac{\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}}{4(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})}$.

II.17. Работа газа в циклическом процессе численно равна площади фигуры, ограниченной графиком процесса на pV -диаграмме (рис. 48), а именно,

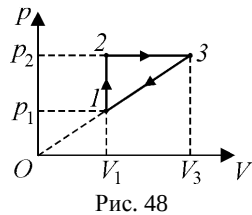


Рис. 48

$A = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_3 - V_1)$. Используя уравнение Менделеева-Клапейрона и учитывая, что для точек 1 и 3, лежащих на прямой, проходящей через начало координат, справедливо равенство

$\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_3}$, запишем выражение для работы газа в цикле в виде:

$A = \frac{1}{2} \nu R (T_1 - 2T_2 + T_3)$, где ν – число молей газа, R – универсальная газовая постоянная, T_i – абсолютная температура газа в точке i ($i = 1, 2, 3$).

Из равенств $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}$ и $\frac{p_2}{T_3} = \frac{p_1}{T_2}$ находим, что $T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$. Учитывая это

равенство, приведем выражение для работы газа к виду:

$A = \frac{1}{2} \nu R (T_1 - 2\sqrt{T_1 T_3} + T_3)$. Количество теплоты, полученной газом в

цикле, равно $Q_n = Q_{1-2} + Q_{2-3} = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1) + \frac{5}{2} \nu R (T_3 - T_2) =$
 $= \frac{1}{2} \nu R (5T_3 - 3T_1 - 2\sqrt{T_1 T_3})$. Коэффициент полезного действия цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_n} = \frac{T_1 - 2\sqrt{T_1 T_3} + T_3}{5T_3 - 3T_1 - 2\sqrt{T_1 T_3}}.$$

Ответ: $\eta = \frac{T_1 - 2\sqrt{T_1 T_2} + T_3}{5T_3 - 3T_1 - 2\sqrt{T_1 T_3}}.$

П.18. Поскольку при изотермическом сжатии влажного воздуха нарушается закон Бойля-Мариотта, ясно, что в процессе сжатия начинается конденсация водяного пара. Давление насыщенного водяного пара при температуре $T = 373$ К равно p_1 . В начальном состоянии давление водяного пара и сухого воздуха равны соответственно ϕp_1 и $(1 - \phi)p_1$. В конечном состоянии пар является насыщенным и его давление равно p_1 , а давление сухого воздуха в три раза больше начального, поэтому справедливо равенство $p_1 + 3(1 - \phi)p_1 = 2p_1$. Отсюда $\phi = \frac{2}{3}$, или 67%.

Ответ: $\phi \approx 67\%$.

Электродинамика

П.19. Емкость конденсатора в момент времени t после начала введения пластины $C(t) = \frac{\epsilon_0}{d} a(a - vt) + \frac{\epsilon_0}{d} \epsilon a v t$. Поскольку напряжение

на конденсаторе поддерживается равным $\mathcal{E}$, то модуль заряда на пластинах конденсатора в этот момент $q(t) = C\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0}{d} a[a + vt(\epsilon - 1)]\mathcal{E}$. За промежуток времени Δt заряд изменится на величину $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t) = \frac{\epsilon_0}{d} av\Delta t(\epsilon - 1)\mathcal{E}$. Ток в цепи $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\epsilon_0}{d} av(\epsilon - 1)\mathcal{E}$. Ясно, что такой ток будет течь при $t \leq \frac{a}{v}$, то есть пока пластина не окажется в конденсаторе полностью. При $t > \frac{a}{v}$ ток станет равным нулю.

Ответ: $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\epsilon_0}{d} av(\epsilon - 1)\mathcal{E}$ при $t \leq \frac{a}{v}$; $I = 0$ при $t > \frac{a}{v}$.

П.20. Емкость конденсатора в момент времени t после начала сближения его пластин $C(t) = \frac{\epsilon_0 S}{d_0}(1 + \alpha t)$. Поскольку напряжение на конденсаторе поддерживается равным $\mathcal{E}$, то модуль заряда на пластинах конденсатора в этот момент $q(t) = C\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0 S}{d_0}(1 + \alpha t)\mathcal{E}$. За промежуток времени Δt заряд изменится на величину $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t) = \frac{\epsilon_0 S}{d_0} \alpha \Delta t \mathcal{E}$.

Ток в цепи $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\epsilon_0 S}{d_0} \alpha \mathcal{E}$.

Ответ: $I = \frac{\epsilon_0 S}{d_0} \alpha \mathcal{E}$.

П.21. Примем потенциал точки O (рис. 49) за нуль. Тогда потенциал точки A равен $\phi_A = \mathcal{E}$, а потенциал точки B равен падению напряжения на сопротивлении R_2 , т.е. $\phi_B = IR_2 = \frac{\mathcal{E}R_2}{R_1 + R_2}$. Потенциал ϕ_D точки D найдем из того условия, что сумма зарядов в месте соединения обкладок всех трех конденсаторов равна нулю. Обозначив через q_1 , q_2 и q_3 модули

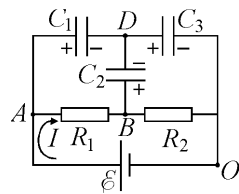


Рис. 49

зарядов конденсаторов C_1 , C_2 и C_3 соответственно, имеем
 $q_1 = C_1(\varphi_A - \varphi_D)$, $q_2 = C_2(\varphi_B - \varphi_D)$, $q_3 = C_3(\varphi_D - \varphi_O) = C_3\varphi_D$,
 $-q_1 - q_2 + q_3 = 0$. Решая эту систему находим

$$\varphi_D = \frac{C_1\varphi_A - C_2\varphi_B}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{[C_1 - C_2R_2/(R_1 + R_2)]}{C_1 + C_2 + C_3}\mathcal{E}.$$

$$q_2 = C_2(\varphi_B - \varphi_D), \text{ получаем, что } q_2 = \frac{(R_2C_3 - R_1C_1)C_2\mathcal{E}}{(R_1 + R_2)(C_1 + C_2 + C_3)}.$$

Ответ: $q_2 = \frac{(R_2C_3 - R_1C_1)C_2\mathcal{E}}{(R_1 + R_2)(C_1 + C_2 + C_3)} \approx 3,3 \text{ мкКл.}$

II.22. Учитывая, что сопротивление идеального вольтметра очень велико, а идеального амперметра – очень мало, для последующего анализа будем использовать эквивалентную схему, изображенную на рис. 50. Сопротивления параллельных ветвей цепи $r_{12} = R_1 + R_2$, $r_{34} = R_3 + R_4$, $r_{56} = R_5 + R_6$. Подставляя числовые данные, находим, что $r_{12} = r_{34} = r_{56} = 3 \text{ кОм}$, т.е. сопротивления всех трех ветвей одинаковы. Обозначив через r сопротивление одной из ветвей, получаем, что полное сопротивление цепи $R = \frac{r}{3} + R_7$. Сила тока,

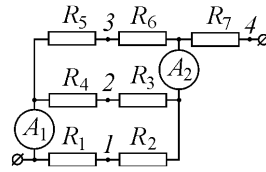


Рис. 50

текущего в неразветвленной цепи (через резистор R_7), равна $I = \frac{U}{R}$. Че-

рез каждую из параллельных ветвей цепи течет одинаковый ток силой $i = \frac{I}{3}$, поэтому токи через амперметры $I_1 = I_2 = 2i = \frac{2U}{3R} = \frac{2U}{r + 3R_7}$. По-

казания U_1 и U_2 вольтметров найдем через напряжения между соответствующими точками цепи (нумерация точек введена на рис. 13). Имеем

$$U_1 = U_{13} = iR_5 - iR_1 = \frac{U}{3R}(R_5 - R_1), \quad U_2 = U_{24} = iR_3 + 3iR_7 = \frac{U}{3R}(R_3 + 3R_7).$$

Ответ: $U_1 = \frac{U}{r + 3R_7}(R_5 - R_1) = 5 \text{ В}; \quad U_2 = \frac{U}{r + 3R_7}(R_3 + 3R_7) = 17,5 \text{ В};$

$$I_1 = I_2 = \frac{2U}{r + 3R_7} = 10 \text{ мА, где } r = R_1 + R_2 = R_3 + R_4 = R_5 + R_6 = 3 \text{ кОм.}$$

II.23. По условию мощность, выделившаяся в проводах, составляет $N_{\text{пр}} = 0,03N$. Согласно закону Джоуля–Ленца, $N_{\text{пр}} = I^2 R_{\text{пр}}$, где I – сила тока в линии, $R_{\text{пр}}$ – сопротивление проводов. Имеем $I = \frac{N}{U}$, $R_{\text{пр}} = \frac{2\rho l}{S}$. Из записанных равенств находим, что $l = \frac{0,03U^2 S}{2\rho N}$.

Ответ: $l = \frac{0,03U^2 S}{2\rho N} \approx 2 \cdot 10^6$ м.

II.24. Поверхность электролита наклонена, поскольку на электролит при протекании тока действует сила Ампера, направленная горизонтально. Если выделить элемент жидкости на поверхности (рис. 51), имеющий длину L и сечение ΔS , по которому течет ток $\Delta I = \frac{I}{S} \Delta S$, где I – полный ток через ванну, а

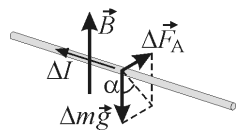


Рис. 51

S – поперечное сечение области, занятой электролитом, то модуль действующей на него силы Ампера $\Delta F_A = \Delta I B L = \frac{IB}{S} L \Delta S$. Модуль действующей на элемент силы тяжести $\Delta mg = \rho_0 L \Delta S g$. Поэтому угол α наклона поверхности к горизонту, совпадающий по величине с углом наклона равнодействующих этих сил к вертикали, $\alpha = \arctg\left(\frac{IB}{S\rho_0 g}\right)$. По-

скольку полный ток через электролит равен $I = \frac{U}{R} = \frac{US}{\rho L}$, то в результа-

те получаем, что $\alpha = \arctg\left(\frac{UB}{\rho_0 \rho L g}\right)$. Отметим, что при $U > \frac{\rho_0 \rho L g}{B}$, что

формально соответствует значению угла α , превышающему 45° , электролит начинает выливаться из ванны. Но на ответ это не влияет, поскольку поперечное сечение области, занимаемой электролитом, в формулу для угла наклона не входит.

Ответ: $\alpha = \arctg\left(\frac{UB}{\rho_0 \rho L g}\right)$ при $U < \frac{\rho_0 \rho L g}{B}$; $\alpha = 45^\circ$ при $U \geq \frac{\rho_0 \rho L g}{B}$.

II.25. Пусть перемычка сместилась на расстояние x относительно начального положения. Тогда магнитный поток через контур изменился на величину $\Delta\Phi = Blx$. Изменение магнитного потока через контур вызвало появление тока в контуре, причем ток менялся от нуля до некоторого значения I . Следовательно, $\Delta\Phi = L\Delta I = LI$, откуда $I = \frac{Blx}{L}$. Сила Ампера, действующая при этом на проводник, равна $F = -IBl$. Уравнение движения перемычки имеет вид $ma = -IBl = -\frac{B^2 l^2 x}{L}$, т.е. совпадает по форме с уравнением гармонических колебаний, причем частота колебаний $\omega = \frac{Bl}{\sqrt{mL}}$, а период: $T = \frac{2\pi\sqrt{mL}}{Bl}$.

Ответ: $T = \frac{2\pi\sqrt{mL}}{Bl}$.

Оптика

II.26. По закону преломления $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n}{n_0} = \frac{c_0}{c}$, где α – угол падения, β – угол преломления, n – показатель преломления стекла, n_0 – показатель преломления стекла воздуха ($n_0 \approx 1$), c_0 – скорость света в воздухе, c – скорость света в стекле. Так как при переходе из одной среды в другую частота света остается неизменной, а длина волны изменяется, то с учетом связи скорости волны с ее частотой ν и длиной волны λ , а именно, $c = \nu\lambda$, находим, что $\frac{c_0}{c} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$. В соответствии с условием, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Поэтому $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)$.

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right) \approx \operatorname{arctg}(1,43) \approx 55^\circ$.

II.27. Условие задачи может быть выполнено, если источник S помещен перед фокусом линзы F , а экраны располагаются по обе стороны от изображения источника S' на равных расстояниях от него (рис. 52). Обозначив через $2x$ расстояние между двумя положениями

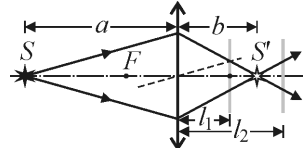


Рис. 52

экранов, указанными в условии, получаем, что расстояние b между линзой и изображением может быть представлено в виде $b = l_1 + x$, или $b = l_2 - x$. Отсюда

$$b = \frac{l_1 + l_2}{2}. \text{ Используя формулу тонкой лин-}$$

зы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ и подставляя в нее получен-

ное выше выражение для b , находим $F = \frac{a(L_1 + L_2)}{(2a + L_1 + L_2)}$.

Ответ: $F = \frac{a(L_1 + L_2)}{(2a + L_1 + L_2)} = 10 \text{ см.}$

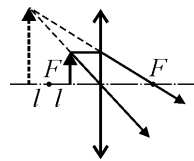


Рис. 53

II.28. Собирающая линза дает прямое изображение предмета в том случае, если предмет находится между фокусом и линзой (рис. 53). Учитывая, что это изображение является мнимым, по формуле тонкой линзы имеем

$$\frac{1}{F - l} - \frac{1}{F + l} = \frac{1}{F}. \text{ Отсюда получаем квадратное урав-}$$

нение $F^2 - 2lF - l^2 = 0$. Условию задачи удовлетворяет положительный корень $F = l(\sqrt{2} + 1)$.

Ответ: $F = l(\sqrt{2} + 1) \approx 9,6 \text{ см.}$

II.29. Построение изображений предмета при двух его положениях представлено на рис. 54. Обозначим расстояния от предмета до линзы при первом и втором его положениях через d_1 и d_2 , соответствующие расстоя-

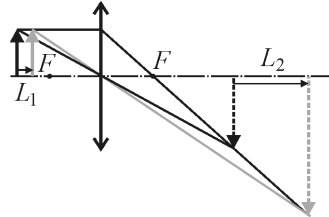


Рис. 54

ния от линзы до изображений через f_1 и f_2 , фокусное расстояние линзы через F . Тогда

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F} \text{ и } \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F}. \text{ Значит,}$$

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}, \text{ или } \frac{f_2 - f_1}{f_1 f_2} = \frac{d_1 - d_2}{d_1 d_2}.$$

Так как $f_2 - f_1 = L_2$, $d_1 - d_2 = L_1$, $\frac{f_1}{d_1} = \Gamma_1$, $\frac{f_2}{d_2} = \Gamma_2$, то $L_2 = L_1 \Gamma_1 \Gamma_2$.

Ответ: $L_2 = L_1 \Gamma_1 \Gamma_2 = 8 \text{ см.}$

II.30. Пусть b – расстояние от линзы до изображения. Используя формулу тонкой линзы, а именно $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$, находим расстояние между

предметом и его изображением $d = a + b = \frac{a^2}{a - f}$. Преобразуем это

выражение следующим образом: $d = \frac{a^2}{a - f} = \frac{(a - 2f + 2f)^2}{a - f} =$

$= \frac{(a - 2f)^2 + 4(a - f)f}{a - f} = \frac{(a - 2f)^2}{a - f} + 4f$. Отсюда видно, что d достигает

минимального значения, равного $d_{\min} = 4f$, при $a = 2f$.

Ответ: $a = 2f$.

II.31. Ход крайних лучей, образующих границы светового пятна на экране, показан на рис. 55, где S' – мнимое изображение источника S . Из подобия изображенных на рисунке треугольников следует равенство $\frac{r}{R} = \frac{b}{b + a}$. По формуле тонкой линзы,

учитывая, что изображение S' мнимое, имеем $\frac{1}{d} - \frac{1}{b} = D = -|D|$, откуда $b = \frac{d}{|D|d + 1}$. Из за-

писанных равенств находим, что радиус линзы $r = \frac{d}{d + (|D|d + 1)a} R$.

Ответ: $r = \frac{d}{d + (|D|d + 1)a} R = 4 \text{ см.}$

II.32. Ход лучей, испущенных источником S , изображен на рис. 56, где S' – изображение источника в отсутствие зеркала. Обозначим расстояние от линзы до точки S' , т.е. длину отрезка OS' через f . По формуле тонкой линзы имеем $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$. Отсюда $f = \frac{dF}{d - F}$. Лучи, отра-

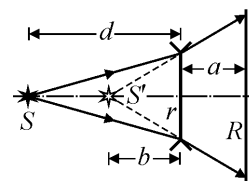


Рис. 55

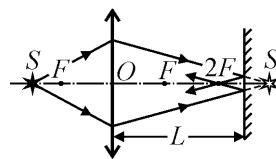


Рис. 56

женные от зеркала, соберутся в точке, находящейся от линзы на расстоянии $2F$, если зеркало расположено посередине между точками $2F$ и S' . Следовательно, расстояние от линзы до зеркала

$$L = 2F + \frac{f - 2F}{2} = F + \frac{dF}{2(d - F)}.$$

Ответ: $L = F + \frac{dF}{2(d - F)} = 2,5F.$

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ – 2012/2013»

I. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Задание для 7-х – 9-х классов

I.1. Пусть длина эскалатора равна L , модуль скорости эскалатора равен $v_э$, а модуль скорости пассажира относительно эскалатора равен $v_п$. Тогда модуль скорости пассажира, идущего вверх по поднимающемуся эскалатору, относительно Земли составляет величину $v_э + v_п$. Из условия задачи вытекают равенства $v_э t_2 = L$, $(v_э + v_п) t_1 = L$ и $v_п \tau = L$.

Отсюда находим, что $\tau = \frac{t_1 t_2}{t_2 - t_1} = \frac{3 \cdot 2}{3 - 2} = 6$ мин.

Ответ: $\tau = \frac{t_1 t_2}{t_2 - t_1} = 6$ мин.

I.2. Вода начнёт вытекать из-под банки, когда сила давления воды на дно банки станет чуть больше силы тяжести, действующей на банку с трубкой, и силы атмосферного давления, т.е. при выполнении условия $(\rho g h + p_a)(S - s) \geq mg + (S - s)p_a$. Здесь p_a – атмосферное давление, $h = \frac{V - V_0}{s}$ – высота столба воды в трубке. Отсюда находим, что

$$m \leq \frac{\rho(V - V_0)(S - s)}{s} = \frac{1 \cdot (110 - 100) \cdot (10 - 1)}{1} = 90 \text{ г.}$$

Ответ: $m \leq \frac{\rho(V - V_0)(S - s)}{s} = 90 \text{ г.}$

I.3. Масса воды, которую требуется получить туристам, $m_{\text{в}} = \rho V = 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 2$ кг, масса льда, который нужно им растопить, $m_{\text{л}} = m_{\text{в}} \cdot \frac{80}{100} = 2 \cdot 0,8 = 1,6$ кг. Количество теплоты, требующееся для растапливания льда при 0°C , равно $Q_1 = m_{\text{л}} \lambda = 1,6 \cdot 330 = 528$ кДж. Количество теплоты, требующееся для нагревания котелка и воды до температуры 100°C , $Q_2 = (Mc_{\text{ж}} + m_{\text{в}}c_{\text{в}}) \cdot (t - t_0) = (0,4 \cdot 0,46 + 2 \cdot 4,2) \cdot 100 = 858,4$ кДж. Количество теплоты, выделяющееся при сгорании бензина, $Q_3 = \frac{(Q_1 + Q_2) \cdot 100\%}{\eta} = \frac{(528 + 858,4) \cdot 100}{40} = 3466$ кДж. Следовательно, масса сгоревшего бензина равна $m_{\text{б}} = \frac{Q_3}{q} = \frac{3466}{44000} \approx 0,079$ кг = 79 г.

Ответ: $m_{\text{б}} = \frac{[0,8 \cdot \rho V \lambda + (Mc_{\text{ж}} + \rho V c_{\text{в}})(t - t_0)] \cdot 100\%}{\eta q} \approx 79$ г.

I.4. Исходная цепь и ее эквивалентная схема в первом и во втором случаях изображены на рис. 57. В первом случае резисторы R_1 и R_2 замкнуты накоротко и сопротивление $R_{AB} = R$, где R – сопротивление отдельного резистора. Во втором случае, когда точки C и D замкнуты проводником, все три резистора оказываются соединенными параллельно. Следовательно, $\frac{1}{R'_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{R}$, и $R'_{AB} = \frac{R}{3} = 1$ Ом. **Ответ:** $R'_{AB} = \frac{R_{AB}}{3} = 1$ Ом.

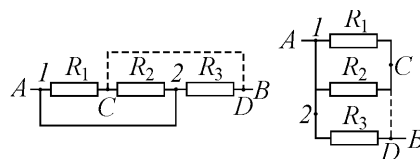


Рис. 57

I.5. Пусть v_1 – модуль скорости поезда в конце девятой части пути разгона, t_1 – время его движения на $1/9$ пути разгона, L – полная длина пути разгона. Поскольку движение поезда является равноускоренным с нулевой начальной скоростью, справедливы равенства: $v_{\text{ср}} = \frac{v_1}{2}$, $\frac{L}{9} = \frac{v_1 t_1}{2}$. Обозначив через t_0 время движения поезда на всем пути раз-

гона, получаем, что $L = \frac{vt_0}{2}$. Из записанных равенств следует, что

$$v = 18v_{\text{ср}} \frac{t_1}{t_0}. \text{ По законам равноускоренного движения имеем } \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Ответ: $v = 6v_{\text{ср}} = 60 \text{ км/ч}$.

Задание для 10-х – 11-х классов

1.6. Выберем систему отсчета с началом на поверхности земли и координатной осью OY , направленной вертикально вверх. Уравнения

движения шариков имеют вид: $y_1(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$,

$$y_2(t) = v_0(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}, \text{ где } t_0 = \frac{v_0}{g} - \text{ время подъема первого шари-}$$

ка до верхней точки. Из равенства $y_1(t_1) = y_2(t_1)$ находим, что промежуток времени t_1 от момента подбрасывания первого шарика до столкновения шариков $t_1 = \frac{3}{2} \frac{v_0}{g}$, а высота h , на которой произойдет

столкновение, $h = \frac{3}{8} \frac{v_0^2}{g}$. Непосредственно перед столкновением скоро-

сти каждого из шариков по величине равны $v = \frac{v_0}{2}$, но направлены в противоположные стороны. По закону сохранения импульса сразу после столкновения скорость слипшихся шариков равна нулю. Время их сво-

бодного падения на землю с высоты h равно $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{v_0}{2g} \sqrt{3}$. Общее

время полёта первого шарика (т.е. искомый промежуток времени)

$$\tau = t_1 + t_2 = \frac{v_0}{2g} (3 + \sqrt{3}) \approx 1,2 \text{ с}.$$

Ответ: $\tau = \frac{v_0}{2g} (3 + \sqrt{3}) \approx 1,2 \text{ с}$.

I.7. После того, как одну из нитей пережгут, шарик начнет двигаться в вертикальной плоскости по дуге окружности радиуса a (рис. 58). В начальный момент скорость шарика и его центростремительное ускорение равны нулю. Отсюда следует, что проекция суммы сил, действующих на шарик в направлении нити, также равна нулю. Величина силы натяжения нити в этот момент определяется формулой $T = mg \cos \varphi$, где g – ускорение свободного падения, φ – начальный угол отклонения нити от вертикали. Косинус этого угла выражается формулой $\cos \varphi = \sqrt{1 - (b/2a)^2}$. Отсюда получаем, что $(T/mg)^2 = 1 - (b/2a)^2$ и $T = mg\sqrt{1 - (b/2a)^2} \approx 0,87 \text{ Н}$.

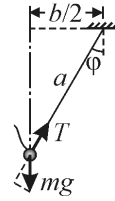


Рис. 58

Ответ: $T = mg\sqrt{1 - (b/2a)^2} \approx 0,87 \text{ Н}$.

I.8. Обозначим через M_0 массу поршня, а через p_0 – атмосферное давление. Пусть в начальном состоянии газа пружина растянута. На поршень действуют четыре силы: сила тяжести M_0g , сила упругости пружины kx (x – удлинение пружины) и сила атмосферного давления p_0S , направленные вниз, и сила давления газа в цилиндре pS , направленная вверх. Условия равновесия поршня в начальном и конечном состояниях газа имеют вид: $M_0g + p_0S + kx_1 = p_1S$, $M_0g + p_0S + kx_2 = p_2S$. Здесь p_1 и p_2 – давления газа в начальном и конечном состояниях. Вычитая из второго уравнения первое, получаем: $p_2 - p_1 = \frac{k}{S}(x_2 - x_1) = \frac{k}{S}(H - h)$. С другой стороны, из уравнения Менделеева–Клапейрона, записанного для начального и конечного состояний газа, а именно $p_1hS = \frac{m}{M}RT_1$, $p_2HS = \frac{m}{M}RT_2$, вытекает, что $p_2 - p_1 = \frac{mR}{MS}\left(\frac{T_2}{H} - \frac{T_1}{h}\right)$. Приравнявая разности давлений газа, найденные этими способами, получаем, что $T_2 = T_1 \frac{H}{h} + \frac{MkH(H-h)}{mR} = 487,5 \text{ К}$.

Ответ: $T_2 = T_1 \frac{H}{h} + \frac{MkH(H-h)}{mR} = 487,5 \text{ К}$.

Замечание. Предлагаем самостоятельно убедиться в том, что от вида деформации пружины (растяжение или сжатие) в начальном и конечном состояниях ответ не зависит.

I.9. В соответствии с определением электроемкости, $C = \frac{q}{u}$, где q – заряд на одной из пластин конденсатора, u – напряжение между пластинами. Для конденсатора с диэлектриком $u = \frac{d}{2} \cdot (E + E_0)$, где d – расстояние между пластинами, $E = \frac{E_0}{\epsilon}$ – напряженность поля в диэлектрике, E_0 – напряженность поля в пространстве, свободном от диэлектрика. Отсюда $C = \frac{2q\epsilon}{dE_0(\epsilon+1)}$. Емкость пустого конденсатора $C_0 = \frac{q}{dE_0}$. Таким образом, $n = \frac{C}{C_0} = \frac{2\epsilon}{\epsilon+1}$. Отсюда $\epsilon = \frac{n}{2-n} = 4$.

Ответ: $\epsilon = \frac{n}{2-n} = 4$.

I.10. Условие задачи допускает два равноценных подхода к решению. В первом подходе естественно предположить, что объектив проекционного аппарата остается неподвижным, а формирование резкого изображения на экране достигается путем перемещения диапозитива (рис. 59). Как известно, линейное увеличение Γ , даваемое линзой, может быть рассчитано по формуле $\Gamma = \frac{f}{d}$,

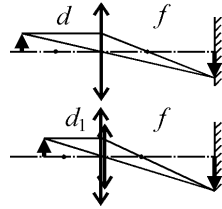


Рис. 59

где d – расстояние от диапозитива до линзы (объектива), а f – расстояние от линзы до экрана, которое не изменяется. Из формулы тонкой линзы следует, что оптическая сила линзы $D_{\text{л}} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{f}(\Gamma + 1)$. При сдвинутых вплотную тонких линзах их оптические силы складываются. Обозначив через D_0 оптическую силу объектива диапроектора, а через D – оптическую силу добавочной

линзы, имеем: $D_0 = \frac{1}{f}(\Gamma_0 + 1)$, $D + D_0 = \frac{1}{f}(\Gamma + 1)$, откуда

$D = \frac{1}{f}(\Gamma - \Gamma_0)$. Учитывая, что конечное увеличение

$\Gamma = \frac{2000}{24} = \frac{3000}{36} \approx 83,3$, а начальное $\Gamma_0 = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \approx 58,9$, находим, что

$D \approx 1,6$ дптр.

Ответ: $D = \frac{1}{f}(\Gamma - \Gamma_0) \approx 1,6$ дптр, где $\Gamma = \frac{2000}{24} \approx 83,3$; $\Gamma_0 = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \approx 58,9$.

В рамках *второго подхода* можно считать, что диапозитив остается неподвижным, а после прижимания к объективу дополнительной линзы для фокусировки изображения на экран перемещают объектив. В этом случае расстояние между диапозитивом и экраном не изменяется, поэтому $d + f = d_1 + f_1$, где d – первоначальное расстояние от диапозитива до объектива, а f – первоначальное расстояние от объектива до экрана, d_1 и f_1 – те же расстояния после прижимания дополнительной линзы (рис. 60). По формуле линзы имеем

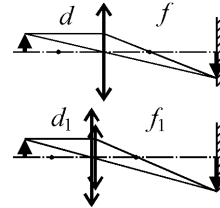


Рис. 60

$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D_0$, $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = D_0 + D$, где D_0 – оптическая сила объектива диапроектора, а D – оптическая сила добавочной линзы. Отсюда

$$D = \frac{f_1 + d_1}{d_1 f_1} - \frac{f + d}{df} = (f + d) \left(\frac{1}{d_1 f_1} - \frac{1}{df} \right).$$

Увеличение, даваемое объективом, $\Gamma_0 = \frac{f}{d}$, увеличение, даваемое объективом с добавочной линзой,

$\Gamma = \frac{f_1}{d_1}$, причем $\Gamma_0 = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}}$. Приведем промежуточные преобразования:

$$d_1 = \frac{f_1}{\Gamma}, \quad d_1 + f_1 = f_1 \frac{\Gamma + 1}{\Gamma}, \quad d = f \frac{\sqrt{2}}{\Gamma}, \quad d + f = f \frac{\Gamma + \sqrt{2}}{\Gamma}, \quad f_1 = f \frac{\Gamma + \sqrt{2}}{\Gamma + 1},$$

$$d_1 = f \frac{\Gamma + \sqrt{2}}{\Gamma(\Gamma + 1)}.$$

Подставляя записанные выражения в формулу для D ,

находим, что $D = \frac{(\sqrt{2}-1)(\Gamma^2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}(\Gamma+\sqrt{2})f}$. По условию

$$\Gamma = \frac{2000}{24} = \frac{3000}{36} \approx 83,3. \text{ Учитывая, что } \Gamma \gg 1, \text{ это выражение можно}$$

упростить и привести к виду $D \approx \frac{(\sqrt{2}-1)\Gamma^2}{f\sqrt{2}\Gamma} = \frac{1}{f} \left(\Gamma - \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{f} (\Gamma - \Gamma_0),$

где $\Gamma_0 = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \approx 58,9$.

Ответ: $D = \frac{(\sqrt{2}-1)(\Gamma^2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}(\Gamma+\sqrt{2})f} \approx \frac{1}{f} (\Gamma - \Gamma_0) \approx 1,6$ дптр,

где $\Gamma = \frac{2000}{24} \approx 83,3$; $\Gamma_0 = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \approx 58,9$.

Поскольку увеличение изображения достаточно велико ($\Gamma, \Gamma_0 \gg 1$), ответы при обоих подходах практически совпадают. Поэтому оба подхода следует считать правильными.

И.11. Гирька движется по желобу вдоль прямой OB , образующей с горизонтальной поверхностью угол φ , под действием сил, изображенных на рис. 61. Здесь $m\vec{g}$ – сила тяжести, m – масса гирьки, $\vec{N}$ – нормальная составляющая силы реакции желоба, $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения скольжения, причем $F_{\text{тр}} = \mu N$ и $N = mg \cos \varphi$. Из рисунка

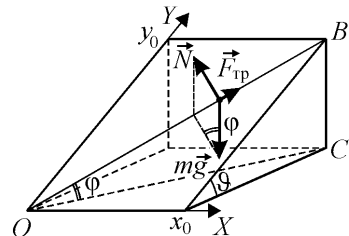


Рис. 61

видно, что $\cos \varphi = \frac{OC}{OB}$, где $OC = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 \cos^2 \vartheta}$, $OB = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Сле-

довательно, $F_{\text{тр}} = \mu mg \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 \cos^2 \vartheta}}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$. Работа силы трения при пере-

мещении гирьки из точки B в точку O равна по модулю $A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} \cdot OB = \mu mg \sqrt{x_0^2 + y_0^2 \cos^2 \vartheta}$. По закону изменения механической

энергии $mg y_0 \sin \vartheta = \frac{mv^2}{2} + \mu mg \sqrt{x_0^2 + y_0^2 \cos^2 \vartheta}$. Выражая из этого равенства v , получаем, что $v = \sqrt{2g(y_0 \sin \vartheta - \mu \sqrt{x_0^2 + y_0^2 \cos^2 \vartheta})} = 2,0$ м/с.

Ответ: $v = \sqrt{2g(y_0 \sin \vartheta - \mu \sqrt{x_0^2 + y_0^2 \cos^2 \vartheta})} = 2,0$ м/с.

II. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Задание для 7-х – 9-х классов

II.1. Расстояние между автобусами равно $l = v\tau_1$. Интервал времени $\tau_2 = \frac{l}{v-u}$. Отсюда $u = \frac{v(\tau_2 - \tau_1)}{\tau_2} = 20$ км/ч.

Ответ: $u = \frac{v(\tau_2 - \tau_1)}{\tau_2} = 20$ км/ч.

II.2. Пусть m_3 – масса золота в монете, а m_c – масса серебра в ней. Тогда вес монеты на воздухе равен $P = (m_3 + m_c)g$, где g – ускорение свободного падения. В воде вес монеты уменьшается на величину архимедовой силы, равной $F_A = \rho_v V g$, где ρ_v – плотность воды, $V = \frac{m_3}{\rho_3} + \frac{m_c}{\rho_c}$ – объем монеты, ρ_3 – плотность золота, ρ_c – плотность серебра.

Относительное уменьшение веса монеты в воде $\frac{k}{100\%} = \frac{F_A}{P} = \frac{\rho_v}{\rho_c} - X \left(\frac{\rho_v}{\rho_c} - \frac{\rho_v}{\rho_3} \right) = \frac{1}{n_2} - X \left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} \right)$, где $X = \frac{m_3}{m_3 + m_c}$ – массовая доля золота в монете. Отсюда следует, что $X = \frac{n_1(1 - n_2 k / 100\%)}{n_1 - n_2} = \frac{20 \cdot (1 - 10 \cdot 8 / 100)}{20 - 10} = 0,4$.

Ответ: $X = \frac{n_1(1 - n_2 k / 100\%)}{n_1 - n_2} = 0,4$, или 40%.

II.3. Пусть C_K – теплоёмкость калориметра и содержащейся в нём первоначально воды, C_B – теплоёмкость порции тёплой воды, содержащейся в ложке, t_0 – первоначальная температура калориметра и содержащейся в нём воды, t_{TB} – температура тёплой воды, t_1 – установившаяся в калориметре температура после вливания одной ложки тёплой воды, t_2 – установившаяся в калориметре температура после вливания двух ложек тёплой воды. Уравнения теплового баланса имеют вид: $C_K(t_1 - t_0) = C_B(t_{TB} - t_1)$, $C_K(t_2 - t_0) = 2C_B(t_{TB} - t_2)$. Учитывая, что по условию $t_{TB} - t_0 = \Delta t$, $t_1 - t_0 = \Delta t_1$, $t_2 - t_0 = \Delta t_1 + \Delta t_2$, из записанных уравнений находим, что $\Delta t = \frac{(\Delta t_1 + \Delta t_2)\Delta t_1}{\Delta t_1 - \Delta t_2} = 20^\circ\text{C}$.

Ответ: $\Delta t = \frac{(\Delta t_1 + \Delta t_2)\Delta t_1}{\Delta t_1 - \Delta t_2} = 20^\circ\text{C}$.

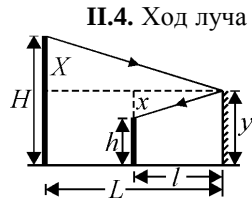


Рис. 62

II.4. Ход луча света, идущего от верхней части головы отца и попадающего в глаз сыну, показан на рис. 62. С учетом закона отражения, из подобия изображенных на рисунке треугольников следует равенство $\frac{X}{L} = \frac{x}{l}$. Кроме того, справедливы соотношения $H - X = h + x = y$. Решая записанную

систему уравнений, находим, что $y = \frac{Hl + hL}{l + L} = 1,4$ м.

Ответ: $y = \frac{Hl + hL}{l + L} = 1,4$ м.

Задание для 10-х – 11-х классов

II.5. Пусть нить, на которой подвешен шар, образует с вертикалью угол α (см. рис. 63). По второму закону Ньютона имеем: $m\omega^2 r = T \sin \alpha$, $mg = T \cos \alpha$, где m – масса шара, $\omega = 2\pi n$ – угловая скорость движения шара по окружности, $r = L \sin \alpha$ – радиус этой окружности, T – натяжение нити, g – модуль ускорения свободного падения. Из этих уравнений находим, что $\cos \alpha = \frac{g}{(2\pi n)^2 L}$. Потенциальная

энергия шара относительно его нижнего положения $E_{\text{п}} = mgL(1 - \cos \alpha)$. Кинетическая энергия шара

$$E_{\text{к}} = \frac{m(\omega r)^2}{2} = \frac{m}{2}(2\pi n L \sin \alpha)^2.$$

С учётом уменьшения угла отклонения нити от вертикали находим, что изменение по-

$$\text{тенциальной энергии шара } \Delta E_{\text{п}} = E_{\text{п}}(n/2) - E_{\text{п}}(n) = -\frac{3mg^2}{4(\pi n)^2},$$

а изменение его кинетической энергии

$$\Delta E_{\text{к}} = E_{\text{к}}(n/2) - E_{\text{к}}(n) = -\frac{3}{2}m \left((\pi n L)^2 + \frac{g^2}{(2\pi n)^2} \right).$$

Поскольку полная механическая энергия шара $E = E_{\text{п}} + E_{\text{к}}$, то искомая работа

$$A = \Delta E_{\text{п}} + \Delta E_{\text{к}} = -\frac{3}{2}m \left((\pi n L)^2 + \frac{3g^2}{4(\pi n)^2} \right).$$

$$\text{Ответ: } A = -\frac{3}{2}m \left((\pi n L)^2 + \frac{3g^2}{4(\pi n)^2} \right) \approx -25,7 \text{ Дж.}$$

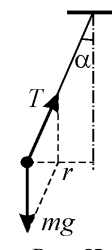


Рис. 63

II.6. Поскольку при первом сжатии давление смеси сухого воздуха и водяного пара в сосуде возросло менее чем в пять раз, пар стал насыщенным и частично сконденсировался. При дальнейшем сжатии давление пара $p_{\text{п}}$ уже не менялось. Пренебрежем объемом сконденсировавшейся воды. Парциальное давление сухого воздуха при первом сжатии возросло в 5 раз, а при втором – еще в 3 раза. Полное давление влажного воздуха до начала сжатия равнялось $p_{\text{п}} + p_{\text{в}}$, где $p_{\text{п}}$ и $p_{\text{в}}$ – парциальные давления пара и сухого воздуха соответственно. По условию задачи получаем: $p_{\text{п}} + 5p_{\text{в}} = 3(p_{\text{п}} + p_{\text{в}})$, $p_{\text{п}} + 15p_{\text{в}} = 7(p_{\text{п}} + p_{\text{в}})$. Отсюда $3p_{\text{п}} = 5p_{\text{в}}$. Следовательно, первоначальная влажность равна $\varphi = \frac{p_{\text{п}}}{p_{\text{п}}} \cdot 100\% = 60\%$.

$$\text{Ответ: } \varphi = \frac{p_{\text{п}}}{p_{\text{п}}} \cdot 100\% = 60\%.$$

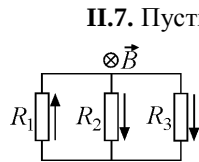


Рис. 64

II.7. Пусть вектор магнитной индукции $\vec{B}$ направлен так, как показано рис. 64. Согласно правилу Ленца, возникающие при выключении магнитного поля ЭДС индукции, вызывают в каждом из малых контуров индукционные токи, текущие по часовой стрелке. Обозначим направления токов через резисторы стрелками на рисунке. По правилам Кирхгофа имеем: $\mathcal{E} = I_1 R_1 + I_2 R_2$; $\mathcal{E} = I_3 R_3 - I_2 R_2$; $I_1 = I_2 + I_3$. Учитывая, что величина ЭДС индукции в каждом малом контуре равна $\mathcal{E} = \alpha S$, получаем, что $I_2 = \frac{\alpha S(R_3 - R_1)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$. По закону Джоуля–Ленца $Q_2 = I_2^2 R_2 t_0$, где

$$t_0 = \frac{B_0}{\alpha}. \text{ Ответ: } Q_2 = \alpha B_0 R_2 \left[\frac{S(R_3 - R_1)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \right]^2 = 0,5 \text{ мДж.}$$

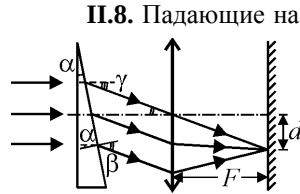


Рис. 65

II.8. Падающие на левую грань призмы лучи преломления не испытывают и падают на правую наклонную грань под углом α (рис. 65). По закону преломления для лучей, выходящих из призмы, имеем $n \sin \alpha = \sin \beta$, где β – угол преломления. Поскольку углы α и β малые, то справедливо приближенное равенство $n\alpha \approx \beta$. Поэтому угол отклонения падающих на призму лучей от первоначального направления равен $\gamma = \beta - \alpha = (n - 1)\alpha$. Угол между главной оптической осью линзы и побочной осью, параллельной падающим на линзу лучам, также равен γ . Отсюда $d = F \cdot \tan \gamma \approx F\gamma = F(n - 1)\alpha$. Следовательно, $n = 1 + \frac{d}{F\alpha} = 1,5$. **Ответ:** $n = 1 + \frac{d}{F\alpha} = 1,5$.

ПРОФИЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН 2013

I. Механика

I.1. На бруски действуют силы, модули и направления изображены на рис. 66, где Mg и mg – модули сил тяжести, N_1 и N_2 – модули нормальных составляющих сил реакции наклонной плоскости, $F_{\text{тр1}}$ и

$F_{\text{тр}2}$ – модули сил трения, T_1 и T_2 – модули сил натяжения нити. Поскольку по условию $\mu_1 < \mu_2 < \tan \alpha \approx 0,6$, то в отсутствии нити оба бруска после того, как их отпустили, начали бы поступательно скользить вниз. По второму закону Ньютона для этого случая имеем следующие равенства:

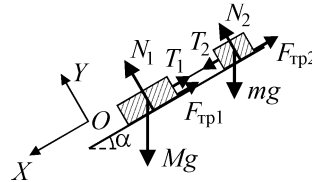


Рис. 66

в проекции на ось OX : $Ma_1 = Mg \sin \alpha - \mu_1 N_1$, $ma_2 = mg \sin \alpha - \mu_2 N_2$,

в проекции на ось OY : $N_1 - Mg \cos \alpha = 0$, $N_2 - mg \cos \alpha = 0$.

Из этих уравнений находим модули ускорений брусков в отсутствии нити: $a_1 = g(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha)$, $a_2 = g(\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha)$. Поскольку $\mu_1 < \mu_2$, модуль ускорения нижнего бруска a_1 оказался бы больше, чем модуль ускорения верхнего бруска a_2 . Поэтому после отпускания брусков нить будет всё время натянута, и ускорения брусков в силу нерастяжимости нити будут одинаковыми ($a_1 = a_2 = a$). Из невесомости нити следует, что $T_1 = T_2 = T$. Поэтому уравнения движения брусков, связанных нитью, в проекции на ось OX имеют вид: $Ma = Mg \sin \alpha - \mu_1 Mg \cos \alpha - T$, $ma = mg \sin \alpha - \mu_2 mg \cos \alpha + T$. Исключая из этих уравнений T , находим, что $a = g \left(\sin \alpha - \frac{\mu_1 M + \mu_2 m}{M + m} \cos \alpha \right)$.

Ответ: $a = g \left(\sin \alpha - \frac{\mu_1 M + \mu_2 m}{M + m} \cos \alpha \right) \approx 2,4 \text{ м/с}^2$.

1.2. Скорости тел, с которыми они начинают свободное падение, определяются из законов сохранения энергии и импульса, а именно

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2} = E_{\text{п}},$$

$$m_1 v_{10} = m_2 v_{20}. \quad \text{Отсюда} \quad v_{10} = \sqrt{\frac{2E_{\text{п}} \cdot m_2}{(m_1 + m_2) \cdot m_1}};$$

$$v_{20} = \sqrt{\frac{2E_{\text{п}} \cdot m_1}{(m_1 + m_2) \cdot m_2}}.$$

Спустя время τ скорости этих тел становятся равными $\vec{v}_1 = \vec{v}_{01} + \vec{g}\tau$, $\vec{v}_2 = \vec{v}_{02} + \vec{g}\tau$ (рис. 67). Здесь $\vec{g}$ – ускорение свободного падения. Из равенства углов α , указанных на рисунке, следует,

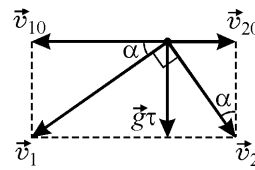


Рис. 67

что $\frac{g\tau}{v_{10}} = \frac{v_{20}}{g\tau}$. Отсюда $\tau = \frac{\sqrt{v_{10} \cdot v_{20}}}{g}$. После подстановки найденных

выше значений начальных скоростей получаем, что $\tau = \frac{1}{g} \sqrt{\frac{2E_{\text{п}}}{(m_1 + m_2)}}$.

Ответ: $\tau = \frac{1}{g} \sqrt{\frac{2E_{\text{п}}}{(m_1 + m_2)}} = 3 \text{ с.}$

1.3. Пусть длина недеформированной пружины равна L (рис. 68, а). Условие равновесия верхней пластины с лежащим на ней грузом (рис. 68, б) имеет вид $(M + m)g = kx_1$. Следовательно, под действием пластины и груза пружина сожмётся на величину $x_1 = \frac{(M + m)g}{k}$. В тот момент, когда ниж-

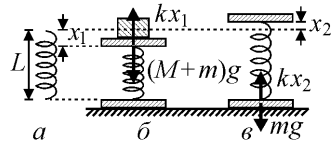


Рис. 68

няя пластина перестает давить на стол (рис. 68, в), выполняется равенство $mg = kx_2$. Следовательно, в этот момент пружина должна быть

растянута на величину $x_2 = \frac{mg}{k}$. Согласно закону сохранения механи-

ческой энергии, справедливо равенство, имеющее вид $\frac{kx_1^2}{2} + mg(L - x_1) = \frac{kx_2^2}{2} + mg(L + x_2) + \frac{mv^2}{2}$. Решая совместно составлен-

ные уравнения, получаем, что $M = \sqrt{4m^2 + \frac{mv^2k}{g^2}}$.

Ответ: $M = \sqrt{4m^2 + \frac{mv^2k}{g^2}} \approx 0,98 \text{ кг.}$

II. Молекулярная физика и термодинамика

II.1. Поскольку расширение газа происходит при постоянном давлении, то $Q = \frac{5}{2}R\Delta T$, где ΔT – изменение температуры газа. Из

уравнения изобарного процесса следует, что $R\Delta T = p\Delta V$, где $p = \frac{mg}{S}$ – давление газа, $\Delta V = S\Delta h$ – изменение его объема. Объединяя записанные выражения, получаем, что $\Delta h = \frac{2Q}{5mg} = 0,1$ м.

Ответ. $\Delta h = \frac{2Q}{5mg} = 0,1$ м.

II.2. Пусть p_1 и V_1 – давление и объём газа в точке 1, а p_2 и V_2 – давление и объём газа в точке 2 (рис. 69). Работа газа на участке 1–2 равна $A_{12} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)$, а на участке 3–1 равна $A_{31} = p_1(V_1 - V_2)$. Поскольку по условию $A_{12} = n|A_{31}|$ и $p \sim V$, то $p_2 = p_1(2n-1)$ и $V_2 = V_1(2n-1)$. Максимальная температура в

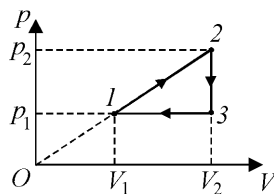


Рис. 69

цикле достигается в точке 2, а минимальная – в точке 1. Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона: $T_{\min} = T_1 = \frac{p_1 V_1}{\nu R}$ и $T_{\max} = T_2 = \frac{p_2 V_2}{\nu R}$, где ν – число молей газа, а R – универсальная газовая постоянная. Следовательно $\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = (2n-1)^2$.

Ответ: $k = (2n-1)^2 = 9$.

II.3. Газ будет охлаждаться при изобарном сжатии на участке цикла 3–1. По первому закону термодинамики $Q = \Delta U + A$, где $\Delta U = \frac{3}{2}R(T_3 - T_1) = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1)$ и $A = p_1(V_3 - V_1)$. Из уравнения Менделеева–Клапейрона следует, что $T_1 = \frac{p_1 V_1}{R}$, $T_2 = \frac{p_2 V_1}{R}$. Учитывая, что

$$p_2 V_1 = p_1 V_3, \text{ окончательно получаем, что } Q = \frac{5}{2}V_1(p_2 - p_1).$$

Ответ: $Q = \frac{5}{2}V_1(p_2 - p_1) = 6,25$ кДж.

III. Электродинамика

III.1. В положении равновесия сумма сил, действующих на каждый заряд системы, равна нулю. Обозначим через a длину стороны шестиугольника и рассмотрим заряд, расположенный в точке A (рис. 70). Расстояния от этого заряда до остальных зарядов системы таковы: $AO = a$, $AB = AF = a$, $AC = AE = l = a\sqrt{3}$, $AD = 2a$. Согласно закону Кулона и принципу суперпозиции, модуль силы, действующей на заряд q , находящийся в точке A , равен

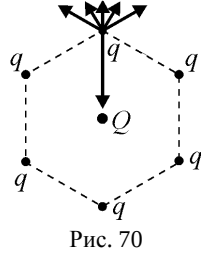


Рис. 70

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(2 \frac{q^2}{a^2} \cos 60^\circ + 2 \frac{q^2}{l^2} \cos 30^\circ + \frac{q^2}{4a^2} + \frac{qQ}{a^2} \right) = 0.$$

Отсюда $Q = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{4}\right)q \approx -1,8q$.

Ответ: $Q = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{4}\right)q \approx -1,8q$.

III.2. На рис. a и b изображены эквивалентные схемы цепи: до замыкания ключа – рис. 71, a , после замыкания ключа – рис. 71, b . До замыкания ключа имеем параллельное соединение конденсаторов одинаковых электроёмкостей $C_3 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2}{3} C_1$. Полная электроёмкость системы до замыкания ключа

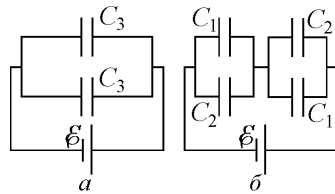


Рис. 71

$C' = \frac{4}{3} C_1$. После замыкания имеем последовательное соединение двух конденсаторов с электроёмкостью $C_4 = C_1 + C_2 = 3 \cdot C_1$. Полная электроёмкость системы после замыкания ключа $C'' = \frac{C_4}{2} = \frac{3}{2} C_1$. Отношение энергий заряженных батарей конденсаторов $n = \frac{W''}{W'} = \frac{9}{8}$. **Ответ:** $n = \frac{9}{8}$.

III.3. В первом случае сумма сил Ампера, действующих на стороны AE и CD равна нулю. Силы Ампера, действующие на стороны AC и ED , сонаправлены. Пусть сопротивление каждой стороны рамки равно R , а её длина l . Тогда сила тока в участке $AEDC$ равна $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{3R}$, а в участке AC – равна $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R}$. Поэтому сумма сил Ампера в первом случае равна $F_1 = I_1 Bl + I_2 Bl = \frac{4\mathcal{E}Bl}{3R}$. Во втором случае токи через участки ACD и AED одинаковы и равны $I = \frac{\mathcal{E}}{2R}$, а силы Ампера, действующие на противоположные стороны рамки складываются. Сумма сил Ампера в этом случае равна $F_2 = \sqrt{(2F_{AE})^2 + (2F_{ED})^2} = 2F_{ED}\sqrt{2} = 2IBl\sqrt{2} = \frac{\mathcal{E}Bl}{R}\sqrt{2}$. Следовательно, $\frac{F_2}{F_1} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. **Ответ:** $n = \frac{3\sqrt{2}}{4} \approx 1,06$.

IV. Оптика

IV.1. Угол падения луча α на дно тарелки определяется формулой $\sin \alpha = a/R$. По закону отражения света луч, отраженный от дна тарелки, составит с вертикалью угол $\beta = 2\alpha$ (рис. 72). Таким же будет угол падения луча на поверхность воды. По закону преломления света $\sin \varphi = n \cdot \sin \beta$. Отсюда

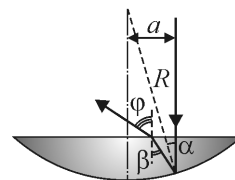


Рис. 72

$$\varphi = \arcsin \left[n \cdot \sin \left(2 \arcsin \frac{a}{R} \right) \right] \approx 2n \frac{a}{R}.$$

Ответ: $\varphi = \arcsin \left[n \cdot \sin \left(2 \arcsin \frac{a}{R} \right) \right] \approx 2n \frac{a}{R} = 0,067 \text{ рад} \approx 3,8^\circ$.

IV.2. При решении задачи нужно рассмотреть два случая.

а) Изображение источника, создаваемое линзой, находится на поверхности сферы (рис. 73, а). Тогда, записав формулу для тонкой линзы, имеем: $\frac{1}{d} + \frac{1}{f-R} = \frac{1}{F_1}$. Отсюда получаем, что $F_1 = \frac{d(f-R)}{d+f-R}$.

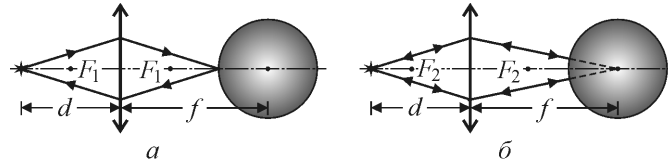


Рис. 73

б) Изображение источника, создаваемое линзой, находится в центре сферы (рис. 73, б). В этом случае имеем $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F_2}$. Отсюда

$$F_2 = \frac{d \cdot f}{d + f}.$$

Ответ: $F = F_1 = \frac{d(f - R)}{d + f - R} = 10$ см; $F = F_2 = \frac{d \cdot f}{d + f} = 12$ см.

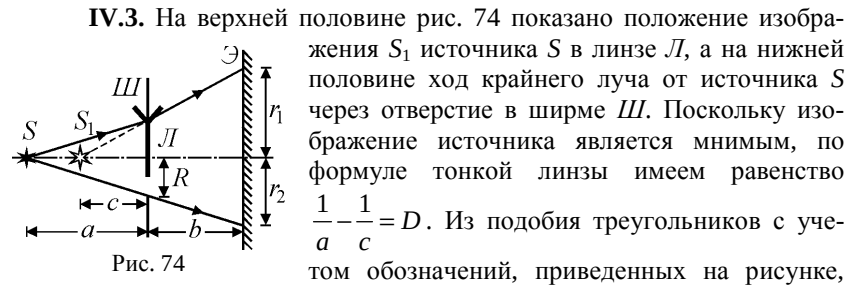


Рис. 74

следует, что $\frac{R}{r_1} = \frac{c}{c + b}$, $\frac{R}{r_2} = \frac{a}{a + b}$. Отсюда $\frac{1}{a} = \frac{r_2}{bR} - \frac{1}{b}$, $\frac{1}{c} = \frac{r_1}{bR} - \frac{1}{b}$.

Подставляя эти соотношения в формулу линзы, находим $D = \frac{r_2 - r_1}{bR}$.

Ответ: $D = \frac{r_2 - r_1}{bR} = -10$ дптр.

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ СТАРШИХ КЛАССОВ НА ФИЗИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ РАБОТАЮТ:

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

для учащихся 10-х и 11-х классов. Занятия платные, проходят два раза в неделю с 17.30 до 20.00. Набор в школу осуществляется ежегодно в сентябре-октябре по результатам собеседования. Занятия по математике и физике проводят ведущие профессора и доценты факультета. Получить информацию о школе Вы можете с 16.00 до 18.00 по телефону **(495) 939-38-78**.

ВЕЧЕРНЯЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ШКОЛА

для учащихся 8-х – 9-х классов. Занятия ведут студенты-старшекурсники и аспиранты факультета. Обучение в школе бесплатное. Семинары проходят в вечернее время с 17 до 19 часов. Набор в школу производится в конце сентября и продолжается в течение учебного года. Получить информацию о ВФШ можно по телефону **(495) 939-11-19**.

ВЕЧЕРНЯЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

для учащихся 9-х – 11-х классов. Школа работает при Государственном астрономическом институте имени П.К. Штернберга (ГАИШ) и Астрономическом обществе. Обучение в школе бесплатное. Занятия проходят в ГАИШ. Набор в школу производится в течение всего учебного года. Получить информацию о школе можно по телефону **(495) 932-88 44**.

СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР МГУ (ШКОЛА им. А.Н.КОЛМОГорова)

для прошедших по конкурсу учащихся из Москвы и других регионов Российской Федерации. Обучение рассчитано на один год (11-й класс), или на 2 года (10-й – 11-й классы). Занятия ведут профессора и преподаватели Московского университета. Учащиеся, успешно окончившие школу, получают рекомендацию для поступления на физический и другие естественные факультеты МГУ.

Адрес СУНЦ МГУ: 121357, Москва, ул. Кременчугская, д.11. Телефон приемной комиссии **(499) 445-11-08**.

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБРАЗОВАНИЯ

предлагает старшеклассникам дистанционные подготовительные курсы по физике и математике. Обучение платное. Курсы ведут профессора и преподаватели физфака МГУ. Для того чтобы стать слушателем Центра, необходимо наличие компьютера и доступ к сети Интернет. Справки по телефону **(495) 939-39-79** или на сайте <http://distant.phys.msu.ru/>.

Учебное издание

ФИЗИКА
ЗАДАЧИ ПРОФИЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА
И ОЛИМПИАД ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ В МГУ – 2013
(С ПОДРОБНЫМИ РЕШЕНИЯМИ)

Оригинал-макет: *Чесноков С.С.*

Издательство ООО «МАКС Пресс»
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
Подписано в печать 16.12.2013 г.
Печать офсетная. Бумага офсетная.
Формат 60х90 1/16. Усл.печ.л. 5,75. Тираж 1000 экз. Изд. № 428.

119991, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова
2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8(495)939-3890/91. Тел./Факс 8(495)939-3891.

Напечатано с готового оригинал-макета

Типография МГУ
119991, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 15
Заказ № 1373