

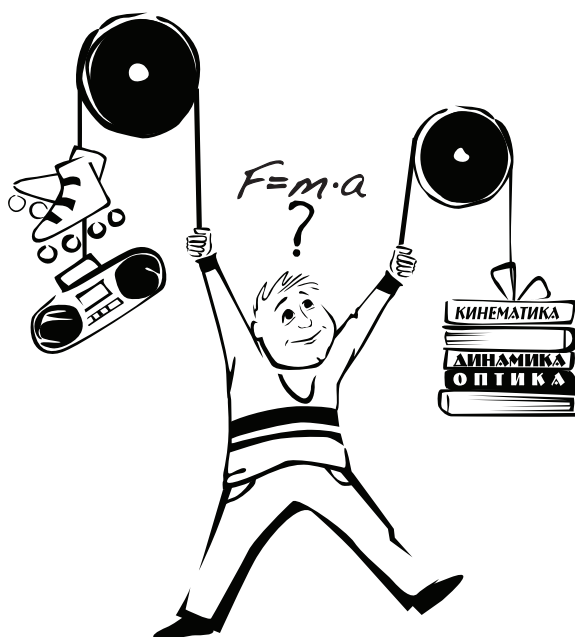


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИКА

ЗАДАЧИ ПРОФИЛЬНОГО
ЭКЗАМЕНА И ОЛИМПИАД
ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ
В МГУ – 2014

(с подробными решениями)



Москва
2014

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

ФИЗИКА
ЗАДАЧИ ПРОФИЛЬНОГО
ЭКЗАМЕНА И ОЛИМПИАД
ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ
В МГУ – 2014

(с подробными решениями)

МАКС ПРЕСС

Москва - 2014

УДК 53(075.3)
ББК 22.3я729
Ф50

Коллектив авторов:

*Буханов В.М., Гайдукова И.Ю., Грачев А.В., Зотеев А.В.,
Козлов С.Н., Лукашева Е.В., Невзоров А.Н., Нетребко Н.В.,
Никитин С.Ю., Овченкова Ю.А., Парфенов К.В., Плотников Г.С.,
Погожев В.А., Полякова М.С., Поляков П.А., Скипетрова Л.А.,
Склянкин А.А., Чесноков С.С., Чистякова Н.И., Шленов С.А.*

**Физика. Задачи профильного экзамена и олимпиад
для школьников в МГУ – 2014** / Буханов В.М. и др. Под ред.
В.А. Макарова. – М.: МАКС Пресс, 2014. – 92 с.: ил.
ISBN 978-5-317-04874-7

Сборник содержит материалы профильного вступительного экзамена и олимпиад для школьников по физике, проводившихся в МГУ в 2013 – 2014 годах. В начале сборника помещена Программа по физике для поступающих в МГУ. Далее следуют условия задач двух олимпиад по физике, вошедших в Перечень олимпиад школьников на 2013/2014 учебный год, утвержденный Минобразования РФ, а именно, двухтуровой олимпиады «Покори Воробьевы горы – 2014» и двухтуровой олимпиады «Ломоносов – 2013/2014». В конце первой части сборника помещены задания профильного экзамена по физике, проводившегося на физическом факультете МГУ и в его Севастопольском филиале.

Во второй части сборника приведены подробные решения всех задач, содержащие обоснования применимости используемых законов и допущений, а также анализ полученных ответов.

Для учащихся старших классов, абитуриентов, учителей и преподавателей, ведущих занятия по физике со школьниками.

УДК 53(075.3)
ББК 22.3я729

ISBN 978-5-317-04874-7

© Авторский коллектив, 2014 г.
© Физический факультет МГУ, 2014 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Программа вступительных испытаний по физике		4
	Условия	Решения
Олимпиада «Покори Воробьевы горы – 2014»	15	43
I. Отборочный этап	15	43
Задание для 7-х – 9-х классов	15	43
Задание для 10-х – 11-х классов	17	48
II. Заключительный этап	21	56
Задание для 7-х – 9-х классов	21	56
Задание для 10-х – 11-х классов	23	59
Механика	23	59
Молекулярная физика и термодинамика	25	62
Электродинамика	26	66
Оптика	28	70
Олимпиада «Ломоносов – 2013/2014»	30	74
I. Отборочный этап	31	74
Задание для 7-х – 9-х классов	31	74
Задание для 10-х – 11-х классов	32	76
II. Заключительный этап	36	82
Задание для 7-х – 9-х классов	37	82
Задание для 10-х – 11-х классов	37	84
Профильный экзамен 2014	39	86
I. Механика	39	86
II. Молекулярная физика и термодинамика	40	87
III. Электродинамика	41	89
IV. Оптика	42	90

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ ПО ФИЗИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В МГУ^{*)}

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Настоящая программа составлена на основе ныне действующих учебных программ для школ и классов с углубленным изучением физики.

При подготовке к экзамену основное внимание следует уделить выявлению сущности физических законов и явлений, умению истолковывать физический смысл величин и понятий, а также умению применять теоретический материал к решению задач. Необходимо уметь пользоваться при вычислениях системой СИ и знать внесистемные единицы, указанные в программе.

Глубина ответов на пункты программы определяется содержанием опубликованных учебников для школ и классов с углубленным изучением физики, указанных в конце настоящей программы.

1. МЕХАНИКА

1.1. Кинематика

Механическое движение. Относительность механического движения. Материальная точка. Система отсчета. Траектория. Вектор перемещения и его проекции. Путь.

Скорость. Сложение скоростей.

Ускорение. Сложение ускорений.

Прямолинейное равномерное и равнопеременное движения. Зависимости скорости, координат и пути от времени.

Криволинейное движение. Движение по окружности. Угловая скорость. Период и частота обращения. Ускорение тела при движении по окружности. Тангенциальное и нормальное ускорения.

Свободное падение тел. Ускорение свободно падающего тела. Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Дальность и высота полета.

Поступательное и вращательное движения твердого тела.

^{*)} Программа утверждена на заседании Ученого совета МГУ 8 декабря 2003 г.

1.2. Динамика

Взаимодействие тел. Первый закон Ньютона. Понятие об инерциальных и неинерциальных системах отсчета. Принцип относительности Галилея.

Сила. Силы в механике. Сложение сил, действующих на материальную точку.

Инертность тел. Масса. Плотность.

Второй закон Ньютона. Единицы измерения силы и массы

Третий закон Ньютона.

Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная. Сила тяжести. Зависимость силы тяжести от высоты.

Силы упругости. Понятие о деформациях. Закон Гука. Модуль Юнга.

Силы трения. Сухое трение: трение покоя и трение скольжения. Коэффициент трения. Вязкое трение.

Применение законов Ньютона к поступательному движению тел. Вес тела. Невесомость. Перегрузки.

Применение законов Ньютона к движению материальной точки по окружности. Движение искусственных спутников. Первая космическая скорость.

1.3. Законы сохранения в механике

Импульс (количество движения) материальной точки. Импульс силы. Связь между приращением импульса материальной точки и импульсом силы. Импульс системы материальных точек. Центр масс системы материальных точек. Закон сохранения импульса. Реактивное движение.

Механическая работа. Мощность. Энергия. Единицы измерения работы и мощности.

Кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек. Связь между приращением кинетической энергии тела и работой приложенных к телу сил.

Потенциальная энергия. Потенциальная энергия тел вблизи поверхности Земли. Потенциальная энергия упруго деформированного тела.

Закон сохранения механической энергии.

1.4. Статика твердого тела

Сложение сил, приложенных к твердому телу. Момент силы относительно оси вращения. Правило моментов.

Условия равновесия тела. Центр тяжести тела. Устойчивое, неустойчивое и безразличное равновесия тел.

1.5. Механика жидкостей и газов

Давление. Единицы измерения давления: паскаль, мм рт. ст.

Закон Паскаля. Гидравлический пресс. Давление жидкости на дно и стенки сосуда. Сообщающиеся сосуды.

Атмосферное давление. Опыт Торричелли. Изменение атмосферного давления с высотой.

Закон Архимеда для тел, находящихся в жидкости или газе. Плавание тел.

Движение жидкостей. Уравнение Бернулли.

1.6. Механические колебания и волны. Звук

Понятие о колебательном движении. Период и частота колебаний.

Гармонические колебания. Смещение, амплитуда и фаза при гармонических колебаниях.

Свободные колебания. Колебания груза на пружине. Математический маятник. Периоды их колебаний. Превращения энергии при гармонических колебаниях. Затухающие колебания.

Вынужденные колебания. Резонанс.

Понятие о волновых процессах. Поперечные и продольные волны. Длина волны. Скорость распространения волн. Фронт волны. Уравнение бегущей волны. Стоячие волны.

Интерференция волн. Принцип Гюйгенса. Дифракция волн.

Звуковые волны. Скорость звука. Громкость и высота звука.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

2.1. Основы молекулярно-кинетической теории

Основные положения молекулярно-кинетической теории и их опытное обоснование. Броуновское движение. Масса и размер молекул. Моль вещества. Постоянная Авогадро. Характер движения молекул в газах, жидкостях и твердых телах.

Тепловое равновесие. Температура и ее физический смысл. Шкала температур Цельсия.

Идеальный газ. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа. Средняя кинетическая энергия молекул и температура. Постоянная Больцмана. Абсолютная температурная шкала.

Уравнение Клапейрона-Менделеева (уравнение состояния идеального газа). Универсальная газовая постоянная. Изотермический, изохорный и изобарный процессы.

2.2. Элементы термодинамики

Термодинамическая система. Внутренняя энергия системы. Количество теплоты и работа как меры изменения внутренней энергии. Теплоемкость тела. Понятие об адиабатическом процессе. Первый закон термодинамики. Применение первого закона термодинамики к изотермическому, изохорному и изобарному процессам. Расчет работы

газа с помощью pV -диаграмм. Теплоемкость одноатомного идеального газа при изохорном и изобарном процессах.

Необратимость процессов в природе. Второй закон термодинамики. Физические основы работы тепловых двигателей. КПД теплового двигателя и его максимальное значение.

2.3. Изменение агрегатного состояния вещества

Парообразование. Испарение, кипение. Удельная теплота парообразования. Насыщенный пар. Зависимость давления и плотности насыщенного пара от температуры. Зависимость температуры кипения от давления. Критическая температура.

Влажность. Относительная влажность.

Кристаллическое и аморфное состояние вещества. Удельная теплота плавления.

Уравнение теплового баланса.

2.4. Поверхностное натяжение в жидкостях

Сила поверхностного натяжения. Явления смачивания и несмачивания. Давление под искривленной поверхностью жидкости. Капиллярные явления.

2.5. Тепловое расширение твердых тел и жидкостей

Тепловое линейное расширение. Тепловое объемное расширение. Тепловое расширение жидкостей. Особенности теплового расширения воды.

3. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

3.1. Электростатика

Электрические заряды. Элементарный электрический заряд. Проводники и диэлектрики. Закон сохранения электрического заряда.

Взаимодействие электрически заряженных тел. Электроскоп. Точечный заряд. Закон Кулона.

Электрическое поле. Напряженность электрического поля. Линии напряженности электрического поля (силовые линии). Однородное электрическое поле. Напряженность электростатического поля точечного заряда. Принцип суперпозиции полей. Теорема Гаусса. Поле равномерно заряженных плоскости, сферы и шара.

Работа сил электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Связь разности потенциалов с напряженностью электростатического поля. Потенциал поля точечного заряда. Эквипотенциальные поверхности.

Проводники и диэлектрики в электростатическом поле. Диэлектрическая проницаемость вещества. Электроемкость. Конденсаторы. Поле плоского конденсатора. Электроемкость плоского конденсатора. Последовательное и параллельное соединение конденсаторов. Энергия заряженного конденсатора.

Энергия электрического поля.

3.2. Постоянный ток

Электрический ток. Сила тока. Условия существования тока в цепи. Электродвижущая сила (ЭДС). Напряжение.

Закон Ома для участка цепи. Омическое сопротивление проводника. Удельное сопротивление. Зависимость удельного сопротивления от температуры. Сверхпроводимость. Последовательное и параллельное соединение проводников. Измерение силы тока, напряжения и сопротивления.

Закон Ома для полной цепи. Источники тока, их соединение. Правила Кирхгофа.

Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца.

Электрический ток в металлах.

Электрический ток в электролитах. Законы электролиза.

Электрический ток в вакууме. Термоэлектронная эмиссия. Электронная лампа – диод. Электронно-лучевая трубка.

Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников. Зависимость проводимости полупроводников от температуры. *p-n* – переход и его свойства. Полупроводниковый диод. Транзистор. Термистор и фоторезистор.

Электрический ток в газах. Самостоятельный и несамостоятельный разряды. Понятие о плазме.

3.3. Магнетизм

Магнитное поле. Действие магнитного поля на рамку с током. Индукция магнитного поля (магнитная индукция). Линии магнитной индукции. Картины магнитного поля прямого тока и соленоида. Понятие о магнитном поле Земли.

Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Закон Ампера.

Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.

Магнитные свойства вещества. Гипотеза Ампера. Ферромагнетика.

3.4. Электромагнитная индукция

Магнитный поток. Опыты Фарадея. Явление электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца.

Самоиндукция. Индуктивность. ЭДС самоиндукции.

Энергия магнитного поля тока.

3.5. Электромагнитные колебания и волны

Переменный электрический ток. Амплитудное и действующее (эффективное) значение периодически изменяющегося напряжения и тока.

Получение переменного тока с помощью индукционных генераторов. Трансформатор. Передача электрической энергии.

Колебательный контур. Свободные электромагнитные колебания в контуре. Превращение энергии в колебательном контуре. Уравнение, описывающее процессы в колебательном контуре, и его решение. Формула Томсона для периода колебаний. Затухающие электромагнитные колебания.

Вынужденные колебания в электрических цепях. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления в цепи гармонического тока. Резонанс в электрических цепях.

Открытый колебательный контур. Опыты Герца. Электромагнитные волны. Их свойства. Шкала электромагнитных волн. Излучение и прием электромагнитных волн. Принципы радиосвязи.

4. ОПТИКА

4.1. Геометрическая оптика

Развитие взглядов на природу света. Закон прямолинейного распространения света. Понятие луча.

Интенсивность (плотность потока) излучения. Световой поток. Освещенность.

Законы отражения света. Плоское зеркало. Сферическое зеркало. Построение изображений в плоском и сферическом зеркалах.

Законы преломления света. Абсолютный и относительный показатели преломления. Ход лучей в призме. Явление полного (внутреннего) отражения.

Тонкие линзы. Фокусное расстояние и оптическая сила линзы. Построение изображения в собирающих и рассеивающих линзах. Формула линзы. Увеличение, даваемое линзами.

Оптические приборы: лупа, фотоаппарат, проекционный аппарат, микроскоп. Ход лучей в этих приборах. Глаз.

4.2. Элементы физической оптики

Волновые свойства света. Поляризация света. Электромагнитная природа света.

Скорость света в однородной среде. Дисперсия света. Спектроскоп. Инфракрасное и ультрафиолетовое излучения.

Интерференция света. Когерентные источники. Условия образования максимумов и минимумов в интерференционной картине.

Дифракция света. Опыт Юнга. Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракционная решетка.

Корпускулярные свойства света. Постоянная Планка. Фотоэффект. Законы фотоэффекта. Фотон. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Давление света. Опыты Лебедева по измерению давления света.

Постулаты теории относительности (постулаты Эйнштейна). Связь между массой и энергией.

5. АТОМ И АТОМНОЕ ЯДРО

Опыты Резерфорда по рассеянию α -частиц. Планетарная модель атома. Квантовые постулаты Бора. Испускание и поглощение энергии атомом. Непрерывный и линейчатый спектры. Спектральный анализ.

Экспериментальные методы регистрации заряженных частиц: камера Вильсона, счетчик Гейгера, пузырьковая камера, фотоэмульсионный метод.

Состав ядра атома. Изотопы. Энергия связи атомных ядер. Понятие о ядерных реакциях. Радиоактивность. Виды радиоактивных излучений и их свойства. Цепные ядерные реакции. Термоядерная реакция.

Биологическое действие радиоактивных излучений. Защита от радиации.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Физика: Механика. 10 кл.: Учебник для углубленного изучения физики /Под ред. Г.Я. Мякишева. – М.: Дрофа, 2001.
2. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика: Молекулярная физика. Термодинамика. 10 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
3. Мякишев Г.Я., Синяков А.З., Слободсков Б.А. Физика: Электродинамика. 10 – 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
4. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика: Колебания и волны. 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
5. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика: Оптика. Квантовая физика. 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
6. Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М. Задачи по элементарной физике. – М.: Физматлит, 2000 и последующие издания.
7. Бендриков Г.А., Буховцев Б.Б., Керженцев В.Г., Мякишев Г.Я. Физика. Для поступающих в вузы: Учебн. пособие. Для подготов. отделений вузов. – М.: Физматлит, 2000 и последующие издания.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Грачев А.В., Погожев В.А., Селиверстов А.В. Физика: 7 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2007.
2. Грачев А.В., Погожев В.А., Вишнякова Е.А. Физика: 8 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2008.
3. Грачев А.В., Погожев В.А., Боков П.Ю. Физика: 9 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2010.
4. Грачев А.В., Погожев В.А., Салецкий А.М., Боков П.Ю. Физика: 10 класс: Базовый уровень; профильный уровень: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2011.

5. Грачев А.В., Погожев В.А., Салецкий А.М., Боков П.Ю. Физика: 11 класс: Базовый уровень; профильный уровень: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2012.
6. Элементарный учебник физики /под ред. Г.С. Ландсберга. В 3-х кн. – М.: Физматлит, 2000 и последующие издания.
7. Яворский Б.М., Селезнев Ю.Д. Физика. Справочное пособие. Для поступающих в вузы. – М.: Физматлит, 2000 и последующие издания.
8. Физика. Учебники для 10 и 11 классов школ и классов с углубленным изучением физики /под ред. А.А. Пинского. – М.: Просвещение, 2000 и последующие издания.
9. Бутиков Е.И., Кондратьев А.С. Физика. В 3-х кн. М.: Физматлит, 2001.
10. Павленко Ю.Г. Физика. Полный курс для школьников и поступающих в вузы: Учебное пособие. – М.: Большая Медведица, 2002.
11. Сборник задач по физике /под ред. С.М. Козела – М.: Просвещение, 2000 и предшествующие издания.
12. Гольдфарб Н.И. Физика. Задачник. 9 – 11 кл.: Пособие для общеобразовательных учебных заведений. – М.: Дрофа, 2000 и последующие издания.
13. Задачи по физике /под ред. О.Я. Савченко – М.: Наука, 1988.
14. Задачи вступительных экзаменов и олимпиад по физике в МГУ – 1992–2013. – М.: Физический факультет МГУ, 2013 и предшествующие издания.
15. Отличник ЕГЭ. Физика. Решение сложных задач /под ред. В.А. Макарова, М.В. Семенова, А.А. Якуты; ФИПИ. – М.: Интеллект–Центр, 2010.
16. Драбович К.Н., Макаров В.А., Чесноков С.С. Физика. Подготовка к вступительным испытаниям в МГУ. – М.: Макс Пресс, 2009.
17. Драбович К.Н., Макаров В.А., Чесноков С.С. Физика. 770 задач с подробными решениями. – М.: Макс Пресс, 2009.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ – 2013»

В 2014 году МГУ совместно с газетой «Московский комсомолец» в десятый раз подряд проводили олимпиаду «Покори Воробьевы горы», которая традиционно проходила в два этапа: отборочный и заключительный. Для учеников 7-х – 9-х классов отборочный этап проводился в течение одного тура с начала ноября 2013 года по середину января 2014 года. На отборочном этапе для учеников 10-х – 11-х классов каждый школьник мог участвовать по собственному выбору в одном, двух или трех турах, проводимых по единой форме и с равноценными заданиями. Условия задач отборочного этапа были доступны каждому участнику в его личном кабинете на сайте олимпиады <http://pvg.mk.ru>. Время, отведенное для выполнения заданий каждого тура, составляло 48 часов.

Ниже приведены задачи, предлагавшиеся на отборочном этапе олимпиады «Покори Воробьевы горы – 2014».

І. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Задания для 7-х – 9-х классов

І.1. Железнодорожные измерения. Ученик седьмого класса Василий Петров купил новую рулетку и поехал на дачу. За окном электрички мелькали столбы телеграфной линии. Вася решил измерить расстояние между столбами. Для этого он измерил длину вагона, оказавшуюся равной L метров. Затем, выбрав длинный перегон, на котором, по его расчетам, поезд должен был идти с постоянной скоростью, Вася зашагал из одного конца вагона в другой, считая столбы, пронесившиеся мимо него. Он насчитал N_1 столбов. Развернувшись, Вася зашагал обратно с той же скоростью относительно вагона, и в этот раз насчитал N_2 столбов. Чему же равно искомое расстояние? Ответ запишите в метрах.

І.2. Школьная плотность. Американский школьник взял стеклянную банку объемом $V = 0,5$ кварты и массой $m_0 = 0,6$ фунта, наполнил ее до краев водой, а затем опустил туда камень массой m_k фунтов, выковыранный из стены школы. Масса банки с водой и камнем оказалась равной m_1 фунтов. Определить плотность материала, из кото-

Условия задач

рого была сделана школа. Ответ дайте в Международной системе единиц, округлив до целого значения. (1 кварта = 0,946 л, 1 фунт = 453,6 г, плотность воды $\rho_{\text{в}} = 10^3 \text{ кг/м}^3$).

I.3. На вкус и цвет... Красная планета Плюм заселена разноцветными бракадашками, вылупляющимися из яиц. Чтобы получить очередного бракадашку, яйцо опускают в глубокий колодец, на дне которого находится неизвестная жидкость, называемая «живая вода». Цвет бракадашки зависит от температуры живой воды (см. таблицу).

$t, ^\circ\text{C}$	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
цвет	черный	фиолетовый	синий	голубой	зеленый	желтый	оранжевый	красный	коричневый	белый

Колодец с живой водой священен, из него нельзя зачерпывать воду и в него нельзя опускать ничего кроме яиц бракадашек и специального груза из неизвестного на Земле сплава. Алисе надо обязательно узнать какого цвета бракадашки будут вылупляться сегодня. У нее есть калориметр, который очень хорошо сохраняет температуру, и градусник. Наполнив калориметр водой с температурой, равной $t_1 = 20^\circ\text{C}$, она опустила туда груз, который до этого находился в колодце с живой водой. Через некоторое время в калориметре устанавливается температура, равная $t_2 = 22,7^\circ\text{C}$. Измерив t_2 , Алиса снова поместила груз в колодец, а потом опять поместила его в калориметр. Тогда температура воды в калориметре оказалась равной $t_3 = 25,2^\circ\text{C}$. После этого в колодец отправилось яйцо бракадашки. Какого цвета вылупится бракадашка?

I.4. Спротивляющиеся квадраты. Из кусков однородной металлической проволоки изготовили рамку в форме квадрата, «рассеченного» на четыре одинаковых меньших квадрата (рис. 1). Сопротивление рамки, измеренное между точками A и D , оказалось равным $R = 24 \text{ Ом}$. Найдите сопротивление рамки между точками A и E . Ответ дайте в омах.

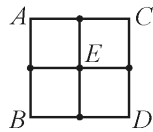


Рис. 1

I.5. Эксперимент по переписке. Однажды Петр Васечкин получил письмо от своего знакомого Василия Петрова, который описывал поставленный им эксперимент. Василий сконструировал «пушку», ко-

торая выстреливала небольшие колечки таким образом, что они начинали скользить по горизонтальной ровной поверхности. Василий выстреливал из пушки небольшое кольцо 1 так, что оно испытывало лобовое соударение с другим кольцом 2, которое покоилось на этой поверхности. После удара кольца разлетались, и Василий измерял пути, пройденные кольцами по поверхности до полной остановки. Оказалось, что $s_1 = (S_1 \pm 0,5)$ мм, а $s_2 = (S_2 \pm 0,5)$ мм. Петров утверждал, что он с очень высокой точностью измерил коэффициенты трения колец о поверхность, которые оказались равными μ_1 и μ_2 соответственно. Чему равно

отношение масс колец $\frac{m_2}{m_1}$, использованных в опыте? Какова возможная ошибка определения этой величины? Ответ на первый вопрос округлите до разряда, соответствующего точности измерения, а ответ на второй – до первой значащей цифры.

I.6. Тянем потянем. Система тел, изображенная на рис. 2, удерживается неподвижной. Найдите ускорение a , с которым начнет опускаться груз массой m после отпускания. Доска, зажатая между двумя одинаковыми брусками массами M , очень легкая. Поверхность, на которой находятся бруски с доской, горизонтальна и коэффициент трения нижнего бруска о поверхность равен $\mu_1 = 0,25$. Ко-

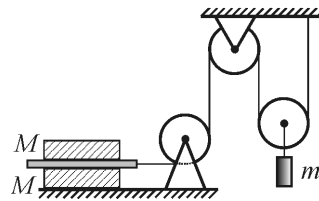


Рис. 2

эффициент трения между доской и каждым из брусков $\mu_2 = 0,75$, нить практически невесома и нерастяжима. Все блоки невесома и вращаются без трения. Каким станет это ускорение, если массу груза увеличить вдвое? Ответы округлите до десятых. Считайте ускорение свободного падения равным $g \approx 10 \text{ м/с}^2$.

Задания для 10-х –11-х классов

Второй тур

I.7. Туда и обратно. Расстояние от Эсгарота до Одинокой Горы равно L км. В отсутствие ветра орел Гваихир может пролететь это расстояние за время t_0 ч. За какое минимальное время t_{\min} он может сле-

Условия задач

тать от Одинокой Горы до Эсгарота и обратно при ветре, дующем со скоростью u км/ч под углом α° к прямой, соединяющей эти пункты? Ответ приведите в часах, округлив до десятых.

I.8. Один или два? Один любознательный школьник собрал из двух аккумуляторов и одного диода источник питания по схеме, показанной на рис. 3. Сначала он подключил к источнику в качестве нагрузки один резистор с сопротивлением $R = 7$ Ом, а затем – два таких резистора последовательно. Во сколько раз отличалась выделяющаяся на нагрузке мощность P в этих двух случаях? В качестве ответа укажите величину

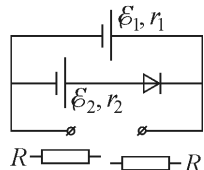


Рис. 3

$n \equiv \frac{P_1}{P_2}$, округлив ее до сотых. ЭДС аккумуляторов равны $\epsilon_1 = 36$ В и $\epsilon_2 = 24$ В, их внутренние сопротивления r_1 Ом и r_2 Ом соответственно. Диод считайте идеальным, то есть примите, что его сопротивление в прямом направлении равно нулю, а в обратном направлении он ток не пропускает.

I.9. Точный баланс. Два небольших заряженных шарика находятся в невесомости в безвоздушном пространстве на расстоянии l м друг от друга и очень далеко от других тел. В начальный момент времени скорости шариков направлены в противоположные стороны перпендикулярно прямой AB , соединяющей их центры, и равны по величине v м/с. Шарики заряжены положительно, и отношение заряда к массе у обоих шариков в точности равно $\frac{q}{m} = 2\sqrt{\pi\epsilon_0 G}$, где $\epsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная, а $G \approx 6,674 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг·с²) – гравитационная постоянная. Какой должна быть величина индукции \vec{B} магнитного поля, перпендикулярного плоскости движения шариков, чтобы они столкнулись при первом же возвращении на прямую AB ? Ответ запишите в гигатесла (ГТл), округлив до сотых. (1ГТл=10⁹ Тл).

I.10. Чем дальше, тем больше. Два шарика одинаковой массой m г каждый прикреплены к концам гибкой нерастяжимой длинной веревки, масса которой ровно такая же. Веревка перекинута через обод вертикального колеса, масса которого M г. При этом 25% массы колеса

приходится на его тонкий обод, а остальные 75% – на втулку колеса, масса которой сосредоточена в тонком кольце радиуса, в три раза меньшего радиуса обода, а спицы – невесомые. Первоначально шарики находятся на одном уровне (см. рис. 4). Колесо может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси. Из-за малого возмущения правый груз начинает опускаться практически без начальной скорости. Какой будет величина a ускорения относительного движения грузов в тот момент времени, когда расстояние между ними по вертикали достигнет величины h см? Длина веревки $L = 1$ м, веревка не отрывается от обода и не скользит по нему. Ускорение свободного падения считайте равным $g \approx 9,8$ м/с². Ответ округлите до десятых.

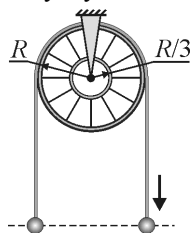


Рис. 4

I.11. И снова непростая работа. Диаграмма циклического процесса, совершаемого над одноатомным идеальным газом, показана на рис. 5 в координатах температура – объем. Участок, отвечающий процессу 1–2, представляет собой отрезок параболы с вершиной в начале координат. В этом процессе абсолютная температура газа увеличивается в n раз, а газ совершает работу A кДж. Найдите работу A , совершенную газом в процессе адиабатного расширения. Ответ дайте в килоджоулях, округлив до десятых.

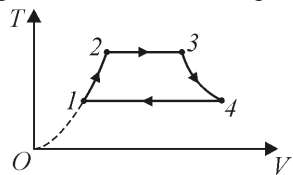


Рис. 5

Третий тур

I.12. Из истории физики. Однажды Галилео Галилей бросал камешки с Пизанской башни. Один из камешков он бросил горизонтально со скоростью u м/с из точки, находящейся на высоте $H = 51$ м над поверхностью земли. Камешек полетел в направлении мальчика, стоящего на расстоянии $L = 68$ м от башни. В то же мгновение этот мальчик бросил свой камешек с помощью пращи со скоростью v м/с, причем вектор этой скорости был направлен на точку вылета камня Галилея. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите, каким будет минимальное расстояние l_{\min} между камешками в процессе полета. Ответ приведите в метрах, округлив до десятых.

I.13. Заряженная гирлянда. Гирлянда из 2014 одинаковых металлических шариков подвешена на длинном непроводящем тросе. Расстояние между шариками много больше их диаметра, и они удалены от других тел, которые могут влиять на электростатические поля. На все шарики нанесен одинаковый заряд Q мкКл. Еще один металлический шарик меньшего размера закреплен на изолирующей ручке. Этим шариком поочередно касаются всех шаров гирлянды. Известно, что после касаний абсолютная величина заряда шарика, которого касались вторым, оказалась на $n\%$ больше, чем шарика, которого касались первым. Чему после всех касаний будет равен заряд маленького шарика? Ответ приведите с учетом знака в нанокюлонах ($1 \text{ нКл} = 10^{-9} \text{ Кл}$), округлив до целых.

I.14. Шарик и ветер. Наполненный гелием воздушный шарик имеет форму, близкую к сферической. Если отпустить его в безветренную погоду, скорость его установившегося (т.е. равномерного) подъема будет равна v_0 м/с. Этот шарик привязали к багажнику велосипеда. Когда велосипедист на этом велосипеде ехал навстречу ветру со скоростью v м/с относительно земли, нить шарика отклонилась от вертикали на постоянный угол α . Найдите этот угол, если скорость ветра в этот момент u м/с. Считайте, что при движении шарика в воздухе модуль действующей на него силы сопротивления пропорционален квадрату его скорости относительно воздуха. Ответ приведите в градусах, округлив до целых.

I.15. Тяжелый удар. На двух невесомых нерастяжимых нитях почти одинаковой длиной l см подвешены рядом два небольших шарика, один из которых очень тяжелый, а другой – очень легкий. Тяжелый шарик отводят в сторону, так что его нить составляет угол α° с вертикалью, и отпускают без начальной скорости (рис. 6). В результате происходит упругое

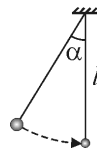


Рис. 6 центральное соударение тяжелого шарика с легким, причем перед ударом скорость тяжелого шарика направлена горизонтально. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите максимальную высоту h_{\max} подъема легкого шарика после удара. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до целых. Кронштейн, на котором подвешены нити, не мешает движению легкого шарика и его нити.

I.16. Пар и газ против пружины. В гладкой горизонтальной трубе, закрытой с одного торца, находятся два тонких поршня (см. рис. 7). Поршень 1 можно передвигать в трубе, фиксируя его в разных положениях, а поршень 2 свободно скользит в трубе. Объем между поршнями вакууммирован, и между ними вставлена невесомая пружина. Между поршнем 2 и закрытым торцом трубы находится воздух с относительной влажностью $f_0\%$. Первоначально поршень 1 находится от закрытого торца трубы на расстоянии, равном длине недеформированной пружины, а поршень 2 – на расстоянии x_0 см. Температура системы поддерживается постоянной. Известно, что при заполнении объема между поршнем 2 и закрытым торцом трубы только насыщенным водяным паром при этой же температуре, поршень 2 при том же положении поршня 1 располагался на расстоянии $x_0/2$. На какое расстояние l нужно сдвинуть поршень 1, чтобы расстояние между поршнем 2 и торцом трубы уменьшилось в n раз? Ответ приведите в сантиметрах, округлив до десятых.

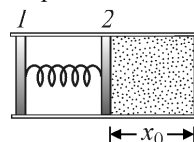


Рис. 7

II. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Победители отборочного этапа были приглашены на заключительный этап, который проходил в семи городах России: Воронеже, Иркутске, Москве, Саратове, Уфе, Чебоксарах и Челябинске. Для учеников 7-х – 9-х классов выполнение заданий заключительного этапа было организовано в школах по месту их проживания. Задания заключительного этапа для участников из старших классов содержали четыре теоретических вопроса, взятых из Программы вступительных испытаний по физике в МГУ, и четыре дополняющих их задачи. Ниже приведены задачи, предлагавшиеся на заключительном этапе олимпиады «Покори Воробьевы горы – 2014».

Задания для 7-х – 9-х классов

II.1. Вору и мошеннику Наземникусу удалось пробраться в сейф, полный золотых слитков и слитков из неизвестного сплава одинакового размера. С помощью волшебного заклинания Наземникус может незаметно выбраться из сейфа, прихватив с собой золота не больше своей массы. Если Наземникус попробует унести чуть больше, его немедленно схватят тролли, охраняющие сейф. Наземникус прихватил с собой тонкий прочный стержень длиной 1 метр и массой 0,3 кг с отверстием, находящемся на расстоянии 25 см от левого конца стержня и гирию мас-

сой 1 кг. Закрепив стержень через имеющееся отверстие, Наземникус соорудил импровизированные весы и узнал, что 1) золотой слиток, подвешенный в левому концу стержня перевешивает слиток из неизвестного сплава, подвешенный к правому концу; 2) слиток из неизвестного сплава вместе с гирей, подвешенные к правому концу, перевешивают золотой слиток, подвешенный к левому концу; 3) гиря, подвешенная к правому концу стержня, перевешивает слиток из неизвестного сплава, подвешенный к левому концу; 4) слиток из неизвестного сплава, подвешенный к правому концу, перевешивает гирю, подвешенную к левому концу. Больше измерений Наземникусу провести не удалось. Определите, какое максимальное количество золотых слитков может взять с собой Наземникус, чтобы наверняка не быть пойманным, если его масса 70 кг (он использует только на данные произведенных взвешиваний).

II.2. Наземникус решил спрятать один из вынесенных золотых слитков в глубоком цилиндрическом колодце, площадь поперечного сечения которого $S = 0,5 \text{ м}^2$. В колодце была вода и поддерживалась температура 0°C . Наземникус поместил слиток в кусок льда, причем лед со слитком плавал на поверхности воды в колодце, не касаясь стенок. Из-за небольшого повышения температуры лед все-таки растаял, и уровень воды в колодце понизился на $\Delta h_1 \approx 9,48 \text{ мм}$. При этом вода из колодца не выливалась и в колодец не поступала. После извлечения слитка из колодца уровень понизился еще на $\Delta h_2 \approx 0,52 \text{ мм}$. Найдите массу m золотого слитка и определите его плотность ρ . Имейте в виду, что слитки содержат небольшое количество примесей, и их плотность может отличаться от табличной плотности чистого золота. Плотность воды в колодце $\rho_0 = 1,00 \text{ г/см}^3$, тепловым расширением всех материалов при небольшом нагревании можно пренебречь.

II.3. Между клеммами A и B цепи, схема которой показана на рис. 8, поддерживается постоянное напряжение $U = 48 \text{ В}$. Сопротивления всех резисторов в схеме одинаковы и равны $R = 10 \text{ Ом}$, сопротивления всех ламп в схеме также можно считать одинаковыми и равными $R_1 \approx 3R = 30 \text{ Ом}$. К цепи подключены амперметр и вольтметр, которые можно считать идеальными (т.е. присутствие

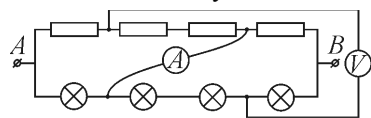


Рис. 8

амперметра практически не влияет на силу тока в его участке цепи, а присутствие вольтметра практически не влияет на напряжение между точками, к которым он подключен), сопротивления соединительных проводов пренебрежимо малы. Найдите показания амперметра и вольтметра.

П.4. Из двух одинаковых цилиндрических роликов массой m , двух одинаковых грузов массой $m_1 = 3m$ и легкой прочной нерастяжимой нити собрали механическую систему, показанную на рис. 9. Один конец нити закреплен на потолке, ролики не вращаются, нить скользит по роликам без трения. Найдите модуль силы \vec{F} , с которой нужно тянуть вверх ось правого ролика, чтобы левый груз в этой системе двигался с постоянной по величине скоростью? Каким при этом будет ускорение a правого груза? Ускорение свободного падения считайте известным.

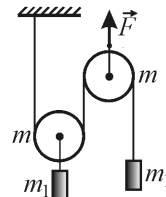


Рис. 9

Задания для 10-х – 11-х классов

Механика

П.5. На гладком горизонтальном столе лежат неподвижно стальные шарики массами m и $2m$, связанные слегка натянутой невесомой нерастяжимой нитью длиной l . Шарик массой m скользит по столу со скоростью v_0 перпендикулярно натянутой нити, и совершает абсолютно упругое центральное соударение с шариком массой m (см. рис. 10). Найдите модуль T силы натяжения нити и модуль a_2 ускорения шарика массой $2m$ после удара.

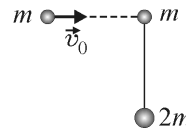


Рис. 10

П.6. Тонкое кольцо радиуса R сделано из резинового жгута с плотностью ρ и модулем Юнга E . На какую величину Δl изменится длина окружности кольца, если его закрутить вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости кольца с угловой скоростью ω ? Изменения длины считайте малыми.

П.7. «Уголок» массой $m = 60$ г, изготовленный из однородной проволоки, имеет два перпендикулярных «плеча» с длинами a и $2a$. Он

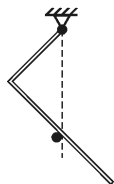


Рис. 11

подвешен за конец короткого плеча на шарнире, который позволяет ему свободно вращаться в вертикальной плоскости, и опирается серединой длинного плеча на гладкий горизонтальный гвоздь, расположенный на одной вертикали с шарниром (рис. 11). Найдите модуль F силы, с которой уголок действует на шарнир. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

П.8. На дне большого по площади водоема глубиной $H = 10 \text{ м}$ удерживают сплошной прямоугольный параллелепипед высотой $h = 0,8 \text{ м}$ и квадратным основанием площадью $S = 1 \text{ м}^2$, изготовленный из дерева плотностью $\rho_1 = 0,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. В некоторый момент параллелепипед отпускают и он начинает медленно всплывать на поверхность воды. Какое количество теплоты Q выделится к тому моменту, когда параллелепипед и вода перестанут двигаться? Плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

П.9. В сосуде находятся две несмешивающиеся жидкости плотностями $\rho_1 = 0,8 \text{ г/см}^3$ и $\rho_2 = 2 \text{ г/см}^3$. В сосуд опускают тело плотностью $\rho = 1,2 \text{ г/см}^3$. При этом тело плавает, не касаясь стенок и дна сосуда. Определите, какая часть n объема тела будет находиться в нижней жидкости.

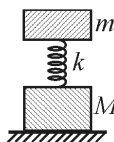


Рис. 12

П.10. Два тела массами M и m соединены легкой пружиной, как показано на рис. 12. Тело массой m совершает гармонические колебания по вертикали с частотой ω и амплитудой A . Найдите отношение n наибольшей и наименьшей сил давления нижнего тела на плоскость стола. Ускорение свободного падения равно g .

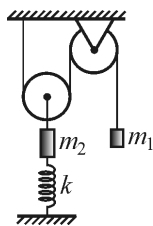


Рис. 13

П.11. В системе, изображенной на рис. 13, массы грузов m_1 и m_2 , жесткость пружины k , блоки, нить и пружина – невесомые, блоки вращаются без трения, нить по блокам не скользит. В положении равновесия пружина растянута. Груз m_1 смещают из положения равновесия вниз на расстояние s , после чего грузы начинают совершать гармонические колебания. Найдите максимальные скорости v_1 и v_2 колеблющихся грузов.

Молекулярная физика и термодинамика

П.12. Найдите скорость роста толщины слоя серебра при напылении в вакууме, если известно, что атомы серебра с энергией $E = 10^{-19}$ Дж оказывают на подложку давление $p = 0,1$ Па. Плотность серебра $\rho = 10,5$ г/см³, молярная масса $\mu = 108$ г/моль. Постоянная Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹.

П.13. Над одним молем гелия провели процесс, в котором его молярная теплоемкость оказалась равной $2,3 \cdot R$, где R – универсальная газовая постоянная. При этом давление гелия p увеличилось на $\Delta p/p = 0,2\%$. На какую величину ΔV изменился объем гелия в этом процессе, если первоначальный его объем составлял $V = 10$ л? Ответ выразите в кубических сантиметрах.

П.14. На гладком горизонтальном столе лежит теплоизолированный сосуд цилиндрической формы, закрытый с обоих торцов и перегороженный тяжелым подвижным поршнем. С обеих сторон от поршня находится по $\nu = 1$ моллю идеального одноатомного газа. Коротким ударом сосуду сообщают скорость v , направленную вдоль его оси. На какую величину ΔT изменится температура газа после затуханий колебаний поршня? Трение между поршнем и стенками сосуда, теплоемкость поршня и стенок можно не учитывать. Масса сосуда m , масса поршня M , масса газа пренебрежимо мала. Универсальная газовая постоянная R .

П.15. В теплоизолированный сосуд, содержащий находящиеся в равновесии $M_0 = 1$ кг воды и $m = 10$ г водяного пара под давлением 1 атм, засыпали $M = 300$ г льда при температуре $t_1 = -10$ °С. Найти температуру t содержимого сосуда после установления теплового равновесия. Удельная теплоемкость льда $c_l = 2,1$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 340$ кДж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4,2$ кДж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $r = 2,48$ МДж/кг.

П.16. В закрытом сосуде объемом $V = 25$ л находится сухой воздух при давлении $p_1 = 10^5$ Па и температуре $t_1 = -23$ °С. В сосуд помещают кусок льда массой $m = 9$ г и нагревают сосуд до температуры

Условия задач

$t_2 = 127^\circ\text{C}$. Определите давление p воздуха в сосуде, если давление насыщенного пара при этой температуре $p_n = 250$ кПа. Молярная масса воды $M = 0,018$ кг/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль·К).

П.17. На рис. 14 изображена p - V -диаграмма участка изотермы, полученного при сжатии влажного воздуха в цилиндрическом сосуде под подвижным поршнем. Найдите температуру T этой изотермы. Определите массу m_1 сухого воздуха в сосуде и массу m_2 воды в состоянии 3. Считайте, что нормальное атмосферное давление $p_0 = 0,1$ МПа. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль·К). Молярная масса сухого воздуха $\mu_1 = 29$ г/моль, воды – $\mu_2 = 18$ г/моль.

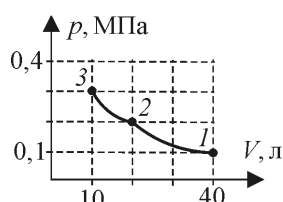


Рис. 14

П.18. В прочном баллоне объемом $V = 50$ л находится 96 г смеси метана CH_4 с кислородом O_2 . При температуре $t_1 = 28^\circ\text{C}$ давление в баллоне равнялось $p_1 = 200$ кПа. Слабая электрическая искра подожгла метан, вызвав реакцию $\text{CH}_4 + 2\text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$. После окончания реакции содержимое баллона охладили до температуры $t_2 = 100^\circ\text{C}$. Каким стало давление p_2 в баллоне? Нормальное атмосферное давление $p_0 \approx 101$ кПа.

Электродинамика

П.19. Два одинаковых маленьких кубика массой m и с зарядом q каждый удерживают на непроводящей горизонтальной плоскости на расстоянии d друг от друга. Какое расстояние l пройдет каждый из кубиков, если их отпустить? Какую максимальную скорость u_{max} приобретут кубики в процессе движения? Коэффициент трения тел о плоскость μ . Электрическая постоянная ϵ_0 .

П.20. На проводящий закрепленный шар радиуса R помещен заряд q . В точках A и B , лежащих по разные стороны от шара на пря-

мой, проходящей через его центр O , ($|OA| = 3R$, $|OB| = 4R$), удерживаются неподвижно небольшие тела, несущие заряды $-4q$ и $-3q$ соответственно. С поверхности шара со скоростью $v_0 = \sqrt{\frac{13q\gamma}{72\pi\epsilon_0 R}}$ вылетает электрон, где γ – модуль удельного заряда электрона. Пренебрегая излучением, найдите, во сколько раз n возрастет скорость электрона после удаления на большое расстояние от этой системы зарядов.

П.21. Лампы накаливания обычно являются нелинейными элементами электрических цепей, поскольку ток в них не пропорционален напряжению. Допустим, у нас есть набор ламп, для которых связь тока и напряжения дается формулой $I(U) = I_0 \sqrt{\frac{U}{U_0}}$, где значения I_0 и U_0 соответствуют номинальному режиму. Кроме того, мы можем использовать набор одинаковых батарей с ЭДС $\mathcal{E} = U_0$. Известно, что при подключении одной лампы к одной батарее, на лампе выделяется мощность $P = \frac{27}{64} P_0$, где P_0 – номинальная мощность. Из какого минимального количества n последовательно соединенных ламп нужно составить гирлянду, чтобы при подключении ее к некоторому количеству последовательно соединенных батарей все лампы гирлянды работали в точности в номинальном режиме? Сколько батарей k потребуется для этого использовать?

П.22. Электрическая цепь состоит из двух источников с одинаковыми внутренними сопротивлениями r и трёх сопротивлений нагрузки (рис. 15), причем ЭДС одного источника в два раза больше ЭДС другого. Какой должна быть величина сопротивления R_x ,

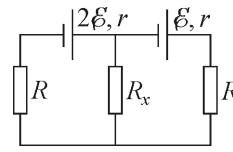


Рис. 15

чтобы на нём выделялась мощность, равная $\frac{\mathcal{E}^2}{64r}$

при минимальной (из возможных) величине силы тока через это сопротивление? Сопротивления нагрузки в боковых ветвях схемы равны $R = 5r$.

II.23. В некоторой ограниченной области пространства создано однородное горизонтальное магнитное поле с индукцией, модуль которой равен B . В этой области на высоте h от поверхности земли равномерно и прямолинейно двигался электрон со скоростью, направленной горизонтально. Вылетев из области, занятой магнитным полем, электрон попал в соседнюю область, где действовала только сила тяжести. На каком расстоянии s , отсчитываемом по горизонтали от точки вылета, электрон достиг поверхности Земли? Модуль удельного заряда электрона γ , ускорение свободного падения g . Влияние воздуха на движение электрона не учитывайте.

II.24. Силовые линии однородного электрического поля с напряженностью $E = 25$ В/м параллельны силовым линиям однородного магнитного поля с индукцией $B = 0,06$ Тл. В эти поля под углом $\beta = 60^\circ$ к их силовым линиям влетает α -частица с начальной скоростью $v_0 = 25$ км/с. Найдите отношение k шага n -го витка винтовой линии, по которой движется частица, к радиусу этого витка. Масса α -частицы $m_\alpha = 4m_p$, ее заряд $q_\alpha = 2e$, где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – модуль заряда электрона, $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг – масса протона.

II.25. Проводник, согнутый под углом α , расположен в горизонтальной плоскости (рис. 16). Металлический стержень может без трения скользить перпендикулярно биссектрисе угла. Модуль индукции однородного вертикального магнитного поля равен B . К стержню приложена горизонтальная сила, модуль которой изменяется с расстоянием x , отсчитываемым от вершины угла, по закону $F = kx$. Определите максимальную скорость v_{\max} стержня, если в процессе движения стержень не теряет контакта с проводником. Сопротивление единицы длины стержня равно ρ , сопротивление проводника пренебрежимо мало.

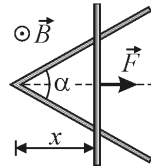


Рис. 16

Оптика

II.26. Прозрачный цилиндр, погружен в воду так, что его верхний торец находится в воздухе параллельно поверхности воды. Точечный источник света расположен вне цилиндра на его оси вблизи верхнего

торца. Найдите минимальный показатель преломления n материала цилиндра, при котором ни один луч, вошедший через основание, не выйдет через боковую поверхность наружу. Показатель преломления воды $n_{\text{в}} = 1,33$.

П.27. В ясный солнечный день на поверхности пруда плавают плот, отбрасывая на горизонтальное дно пруда тень в форме круга диаметра $D = 2$ м. Какова глубина пруда H , если при затягивании неба сплошной облачностью тень от плота на дне пруда превращается в точку? Показатель преломления воды относительно воздуха $n = 1,33$. Поверхность воды считайте гладкой. Толщиной плота можно пренебречь.

П.28. Шарик подвешен на нити длиной l и движется в горизонтальной плоскости по окружности вокруг вертикальной оси, которая проходит через точку подвеса. На расстоянии d от плоскости движения под шариком находится тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F < d$. Главная оптическая ось линзы совпадает с осью вращения шарика. Чему равна угловая скорость ω обращения шарика, если его изображение движется по окружности радиуса R ?

П.29. При помощи тонкой линзы на экране создано изображение булавки, расположенной на главной оптической оси линзы перпендикулярно ей. При этом отношение линейных размеров изображения и самой булавки было равно $\Gamma = 2$. Не трогая булавку, линзу отодвинули от булавки на расстояние $s = 20$ см вдоль ее главной оптической оси. После перемещения линзы и подбора соответствующего положения экрана отношение размеров изображения и булавки стало равным $\Gamma' = 1$. Найдите оптическую силу линзы D .

П.30. Тонкая линза с фокусным расстоянием $F_1 = 12$ см создает на экране изображение предмета с увеличением $\Gamma_1 = 9$. Другая тонкая линза при том же расстоянии между предметом и экраном дает на экране изображение предмета с увеличением $\Gamma_2 = 3$. Найдите фокусное расстояние F_2 второй линзы.

П.31. Оптическая система состоит из двух тонких собирающих линз с фокусными расстояниями $F_1 = F$ и $F_2 = \frac{F}{2}$. Главные оптические

Условия задач

оси линз совмещены. Точечный источник света расположен на расстоянии $d_1 = \frac{3F}{2}$ перед первой линзой, а его изображение – на расстоянии $f_2 = \frac{F}{3}$ за второй линзой. На каком расстоянии L друг от друга находятся линзы?

П.32. Тонкая рассеивающая линза дает изображение предмета с увеличением $\Gamma_1 = \frac{1}{5}$. Если вплотную к ней приставить тонкую собирающую линзу, то эта система создает прямое изображение с увеличением $\Gamma_2 = \frac{1}{3}$. Определите, с каким увеличением Γ получится изображение, даваемое одной собирающей линзой. Расстояние от линзы до предмета во всех случаях одинаково.

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ – 2013/2014»

В 2013/2014 учебном году олимпиада «Ломоносов» по физике в МГУ проводилась в два этапа – отборочный и заключительный. Отборочный этап проходил в форме заочного испытания. На этом этапе каждый ученик 10-го – 11-го класса мог участвовать по собственному выбору в одном, двух или трех турах, проводимых по единой форме и с равноценными заданиями. Задания олимпиады были размещены в Интернете на сайте <http://olymp.msu.ru>. Доступ к условиям заданий был открыт для участников трижды: с 21 по 24 ноября 2013 года (1-й тур), с 16 по 19 декабря 2013 года (2-й тур) и с 19 по 22 января 2014 года (3-й тур). Прием решений и ответов по каждому из туров прекращался одновременно с их завершением. После прохождения всех туров олимпиады каждый участник до 29 января 2014 года должен был самостоятельно определить номер тура, который для него является официальным. Для учеников 7-х – 9-х классов отборочный этап проводился в один тур с 21 ноября 2013 года по 19 января 2014 года.

Победители и призеры отборочного этапа были приглашены для участия в заключительном этапе олимпиады. Ниже приводятся примеры заданий для участников отборочного тура олимпиады Ломоносов.

I. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Задание для 7-х – 9-х классов

I.1. Рабочий затаскивает вверх по наклонному трапу ящик массой $m = 90$ кг, прикладывая к нему силу, направленную параллельно трапу и равную $F = 500$ Н (рис. 17). Трап образует с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$, а движение ящика происходит с постоянной скоростью. Найдите коэффициент полезного действия η используемого рабочим трапа. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с². Ответ приведите в процентах, округлив до целого значения.

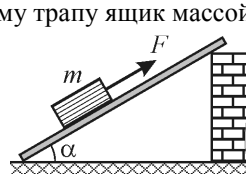


Рис. 17

I.2. На горизонтальном дне сосуда, доверху заполненного водой, лежит тело, имеющее форму полушара радиуса $R = 10$ см, причем под нижнюю плоскую поверхность тела вода не подтекает. С какой силой N тело давит на дно сосуда, если масса тела $m = 2$ кг, а глубина сосуда $h = 30$ см? Плотность воды считайте равной $\rho = 1$ г/см³, а ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Атмосферное давление не учитывайте. Ответ округлите до целого значения.

Указание. Объем шара радиуса R равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, площадь круга того же радиуса равна $S = \pi R^2$.

I.3. Между свободными концами двух последовательно соединённых резисторов (рис.18) поддерживается постоянное напряжение $U = 10$ В. Сопротивление одного из резисторов равно $r = 1$ Ом, а сопротивление R второго подобрано так, что на нем выделяется мощность, максимально возможная при данном значении r . Определите мощность P , выделяющуюся при этом на резисторе с сопротивлением r .

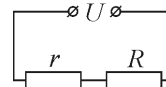


Рис. 18

I.4. На главной оптической оси тонкой собирающей линзы L расположен отрезок тонкой светящейся нити длиной $l = 2$ см (см. рис. 19). Дальний от линзы конец нити совпадает с фокусом линзы. Фокусное расстояние линзы равно $F = 10$ см, а её диаметр равен $d = 8$ мм. По другую сторону за линзой на расстоянии $L = 20$ см от нее перпендикулярно ее

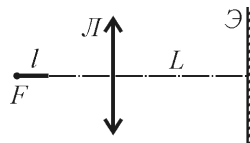
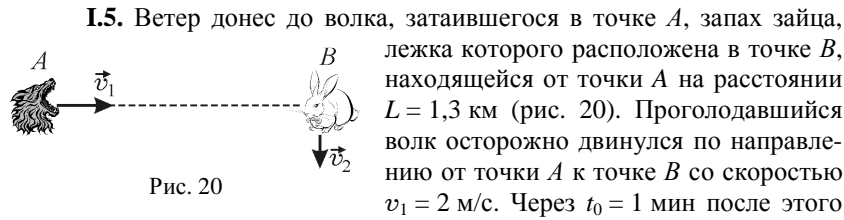


Рис. 19

Условия задач

главной оптической оси расположен экран Э. Определите диаметр D светлого пятна на экране. Ответ выразите в миллиметрах.



I.6. Мальчик выстрелил из пневматического пистолета маленьким шариком, направив ствол пистолета вертикально вверх. Спустя время $\tau = 8,7$ с шарик вернулся в точку, откуда был произведен выстрел, имея в момент падения скорость $u_2 = 37$ м/с. Какова скорость u_1 , с которой шарик вылетел из ствола пистолета, если сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости шарика? Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

Задание для 10-х – 11-х классов

Первый тур

I.7. Стоящий на горизонтальном льду мальчик массой $M = 30$ кг бросает в горизонтальном направлении камень массой $m = 3$ кг. Определите коэффициент трения μ мальчика о лёд, если после броска мальчик откатился на расстояние $L = 0,5$ м, а модуль скорости камня относительно Земли в момент броска был равен $u = 10$ м/с. Влиянием силы трения во время броска можно пренебречь. Модуль ускорения свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с².

I.8. Железный кубик массой $m = 50$ г удерживают неподвижным на горизонтальной плоскости в положении, показанном на рис. 21, с помощью натянутой горизонтально лёгкой нити, расположенной в вертикальной плоскости, проходящей через центр масс кубика. Определите модуль F силы, действующей на кубик со стороны плоскости, если угол $\alpha = 15^\circ$. Модуль ускорения свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с².

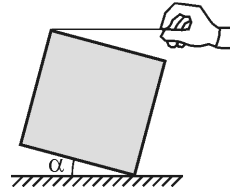


Рис. 21

I.9. Находившийся в объёме $V_1 = 5$ л идеальный одноатомный газ массой $m = 0,8$ г под давлением $p_1 = 0,1$ МПа изохорно нагрели, а затем его объём изобарно уменьшили до величины $V_3 = 3$ л, совершив работу $A = 400$ Дж. Определите разность температур газа в конечном и начальном состояниях. Молярная масса газа равна $\mu = 4$ г/моль, а универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль·К). Ответ округлите до целых.

I.10. Два одинаковых плоских конденсатора соединены последовательно и подключены к батарейке. Между пластинами конденсаторов находится воздух. Емкость каждого конденсатора равна $C = 100$ пФ, ЭДС батарейки равна $\mathcal{E} = 10$ В, а её внутреннее сопротивление равно $r = 10$ Ом. Определите максимальное количество теплоты Q , которое может выделиться в батарейке после заполнения одного из конденсаторов диэлектриком с проницаемостью $\epsilon = 2$. Ответ выразите в наноджоулях.

I.11. На переднюю грань находящейся в воздухе плоскопараллельной прозрачной пластинки с показателем преломления $n = 1,5$ падает сходящийся конический пучок с углом при вершине, равным $2\alpha = 60^\circ$. Ось пучка перпендикулярна плоскости пластины. Радиус освещённого пятна на передней грани пластинки равен $R = 4$ см. Определите минимальную толщину h пластинки, при которой радиус светлого пятна на задней её грани будет в $k = 2$ раза меньше R . Ответ приведите в сантиметрах, округлив до двух знаков после запятой.

Второй тур

I.12. Человек массой $m = 60$ кг стоит в середине квадратного плота массой $M = 200$ кг и площадью $S = 4$ м², неподвижно плавающего на поверхности воды. На какое расстояние x переместится плот, если человек медленно перейдет в угол плота? Сопротивлением воды можно пренебречь. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до целых.

I.13. Доска массой $m = 10$ кг лежит на горизонтальном полу, а на ней стоит ящик массой $M = 50$ кг (рис. 22). Коэффициент трения между доской и полом $\mu_1 = 0,2$, а между ящиком и доской – $\mu_2 = 0,6$. Доску и ящик приводят в движение, прикладывая к доске горизонтальную силу, направленную вдоль продольной оси доски. При каком максимальном значении модуля F этой силы ящик не будет скользить по доске? Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

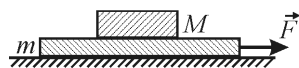


Рис. 22

I.14. В прочном сосуде объемом $V = 100$ л находится смесь из $\nu_1 = 0,05$ моль водорода и $\nu_2 = 1$ моль сухого воздуха. С помощью электрической искры смесь поджигают. Найдите относительную влажность φ воздуха в сосуде после сгорания водорода и охлаждения содержимого сосуда до температуры $t = 20$ °С. Давление насыщенного водяного пара при этой температуре $p_{\text{н}} = 2,33$ кПа. Массовая доля кислорода в воздухе составляет примерно 23%. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль·К). Ответ приведите в процентах, округлив до целых.

I.15. Достаточно длинная гладкая пластмассовая трубка, закрытая с обоих концов, заполнена газом. В трубке находится маленький гладкий шарик, несущий электрический заряд $q = 50$ нКл. Трубку поместили в барокамеру, из которой откачан воздух и в которой создано постоянное однородное магнитное поле с индукцией, направленной вертикально и равной по модулю $B = 1$ Тл. Трубку расположили горизонтально и начали ее двигать поступательно, направив вектор ее скорости перпендикулярно и трубке, и вектору магнитной индукции. Какую мощность N необходимо затрачивать, чтобы обеспечить движение трубки с постоянной скоростью $v_0 = 1$ м/с начиная с того момента, когда движение шарика относительно трубки станет установившимся? Считайте, что модуль силы вязкого трения, действующей на шарик со стороны газа,

пропорционален скорости u шарика относительно трубки, т.е. $F_{\text{сопр}} = \alpha u$. Коэффициент α примите равным $\alpha = 10^{-3}$ Н·с/м. Ответ приведите в пиковаттах, округлив до одного знака после запятой.

I.16. Параллельный пучок света радиуса $r = 2$ см падает на собирающую линзу с фокусным расстоянием $f = 50$ см параллельно ее главной оптической оси. За линзой находится плоскопараллельная стеклянная пластина толщиной $h = 10$ мм, установленная перпендикулярно главной оптической оси линзы. Расстояние от линзы до ближайшей к ней грани пластины $l = 70$ см. Показатель преломления стекла $n = 1,5$. Найдите радиус R светового пучка на выходе из пластины. Ответ приведите в миллиметрах, округлив до одного знака после запятой.

Третий тур

I.17. Два бруска покоятся на гладкой горизонтальной плоскости. Между ними находится сжатая пружина, связанная нитью (рис. 23). После пережигания нити пружина полностью распрямляется, и бруски начинают двигаться поступательно со скоростями $v_1 = 4$ м/с и $v_2 = 2$ м/с. Вычислите энергию $E_{\text{п}}$, которая была запасена в пружине, если известно, что суммарная масса брусков $M = 6$ кг. Пружину считайте невесомой.



Рис. 23

I.18. На гладкой горизонтальной поверхности дна тележки находится груз, прикрепленный к передней стенке тележки с помощью пружины (рис. 24). Тележку двигают с постоянным ускорением $a = 5$ м/с², причем груз неподвижен относительно тележки. Достигнув скорости $v = 1$ м/с, тележка резко останавливается, наткнувшись на препятствие, и остается неподвижной. При этом возникают гармонические колебания груза с периодом $T = 1$ с. Найдите амплитуду A этих колебаний. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до одного знака после запятой.

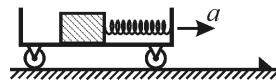


Рис. 24

I.19. В теплоизолированный сосуд с малой теплоемкостью, содержащий спирт при температуре $t = 45$ °С, опустили стальной кубик с длиной ребра $a = 1$ см, имеющий температуру $t_0 = 15$ °С. Спустя некото-

рое время в сосуде установилось тепловое равновесие при температуре $t_1 = 35$ °С. Затем в сосуд положили второй стальной кубик с длиной ребра $b = 2$ см. После этого в сосуде установилось тепловое равновесие при температуре $t_3 = 40$ °С. Определите начальную температуру t_2 второго кубика. Ответ приведите по шкале Цельсия, округлив до одного знака после запятой.

I.20. Батарея, замкнутая на сопротивление $R_1 = 90$ Ом, обеспечивает ток в цепи $I_1 = 0,1$ А. Если батарею замкнуть на сопротивление $R_2 = 40$ Ом, то в цепи потечет ток $I_2 = 0,2$ А. Какой ток I_3 будет течь через сопротивление $R_3 = 10$ Ом, если его подключить к двум таким же батареям, соединенным параллельно? Ответ округлите до двух знаков после запятой.

I.21. Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 20$ см и рассеивающей линзы с фокусным расстоянием, модуль которого $F_2 = 30$ см. Главные оптические оси этих линз совмещены друг с другом, а расстояние между линзами $l = 5$ см. На собирающую линзу падает параллельный пучок света, ось которого совпадает с главной оптической осью линзы. Определите, на какое расстояние Δx сместится точка, в которую будет сфокусирован пучок после прохождения системы линз, если линзы поменять местами. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до одного знака после запятой.

II. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Заключительный этап олимпиады «Ломоносов» был назначен на 28 февраля 2014 года. Для учащихся всех классов этот этап проводился в очной форме на физическом факультете МГУ и на 8 региональных площадках в городах Барнаул, Воронеж, Кисловодск, Саров, Таганрог, Уфа, Чебоксары и Челябинск. Кроме того, по желанию ряда учеников 7-х – 9-х классов выполнение заданий заключительного этапа было организовано в школах по месту их проживания.

Задания для учащихся 10-х – 11-х классов были составлены в полном соответствии с Кодификатором элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для единого государственного экзамена 2014 года по физике и охватывали основные разделы Кодификатора, а именно, 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. Типовое задание состояло из четырех различных разделов, состоящих из кратких вопросов по теории и дополняющих их задач. В первом разделе были помещены задания по механике, во втором

разделе – задания по молекулярной физике и термодинамике, в третьем разделе – задания по электродинамике, в четвертом разделе – задания по оптике

Ниже приводятся задания заключительного этапа олимпиады «Ломоносов – 2013/2014»

Задание для 7-х – 9-х классов

II.1. Снаряд, летевший со скоростью, модуль которой $v = 50$ м/с, разорвался на три осколка, два из которых имели одинаковые массы $m = 20$ кг каждый, а масса третьего осколка была в два раза больше. В результате взрыва суммарная кинетическая энергия осколков непосредственно после взрыва увеличилась на $\Delta E_k = 3,6$ МДж. Считая, что осколки после взрыва летят поступательно и модули скоростей легких осколков равны друг другу, определите модуль v_3 максимально возможной скорости тяжелого осколка непосредственно после взрыва.

II.2. Стоявшую на столе в комнате длительное время открытую банку объемом $V = 3$ л герметически закрыли и поместили в холодильник. Температура воздуха в комнате была равна $t_k = 20$ °С, а его относительная влажность $\phi = 60\%$. Определите массу m льда, который образуется в банке через достаточно большой промежуток времени после этого. В холодильнике поддерживается температура $t_x = -10$ °С. Плотность насыщенных паров воды при температуре t_k равна $\rho_k = 17,32$ г/м³, а при температуре t_x равна $\rho_x = 2,14$ г/м³. Ответ приведите в миллиграммах, округлив до целых.

II.3. Сопротивление обмотки реостата $r = 16$ Ом, длина реостата $L = 20$ см. Найдите сопротивление R цепи между точками A и B (см. рис. 25), если движок реостата находится на расстоянии $x = 5$ см от его левого конца.

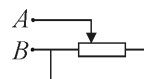


Рис. 25

II.4. Высота Солнца над горизонтом составляет угол $\alpha = 32^\circ$. Под каким углом β к горизонту следует расположить плоское зеркало для того, чтобы осветить солнечными лучами дно глубокого вертикального колодца?

Задание для 10-х – 11-х классов

II.5. Чему равны сила трения покоя и сила трения скольжения? Дайте определение коэффициента трения.



Рис. 26

Задача. Олимпийская трасса для соревнований по бобслею в Сочи имеет перепад высот от старта до финиша $h = 132$ м. На стартовом горизонтальном участке («полоса разгона») спортсмены разогнали боб до скорости $v_0 = 6$ м/с, с которой пересекли линию старта (рис. 26). В конце спуска по ледяному жёлобу сразу после финиша используется специальное тормозное устройство для гашения скорости боба на горизонтальной поверхности. При этом коэффициент трения на участке торможения увеличивается пропорционально расстоянию x от линии финиша по закону $\mu(x) = \alpha \cdot x$, где α – некоторый постоянный коэффициент. Определите скорость u боба в тот момент, когда он пройдет половину тормозного пути. Примите, что на участке трассы от конца полосы разгона до финиша за счёт сил трения было потеряно $\eta = 20\%$ механической энергии боба. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с². Ответ приведите в м/с с точностью до десятых.

П.6. Какие виды парообразования вы знаете? Дайте определение удельной теплоты парообразования.

Задача. В цилиндре под поршнем при температуре $t = 100$ °С находится воздух с относительной влажностью $\varphi = 0,5$ под давлением $p_0 = 1,5$ атм.

Объём воздуха изотермически уменьшили настолько, что $n = \frac{1}{2}$ массы имевшегося первоначально в цилиндре водяного пара сконденсировалась. Определите давление p_k , установившееся при этом под поршнем.

П.7. Сформулируйте закон Кулона. Дайте определение напряженности электрического поля.

Задача. Маленький шарик, несущий некоторый положительный заряд, подвешен на тонкой непроводящей нити и находится в однородном электрическом поле, созданном протяженной заряженной плоскостью, расположенной вертикально. При полном погружении шарика в непроводящую жидкость с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 3$ и плотностью $\rho_0 = 0,8$ г/см³ оказалось, что угол отклонения нити от вертикали не изменился. Определите плотность ρ материала шарика.

П.8. Дайте определение светового луча. Сформулируйте закон прямолинейного распространения света.

Задача. Расстояние от предмета до экрана $L = 1$ м. Какое максимальное увеличение Γ_{\max} изображения предмета на экране можно получить с помощью тонкой линзы с фокусным расстоянием $F = 16$ см?

ПРОФИЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН 2014

В 2014 профильный экзамен (дополнительное вступительное испытание) по физике в МГУ и в его Севастопольском филиале проводился в письменной форме. Типовое задание для абитуриента охватывало все основные разделы программы по физике для поступающих в МГУ: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. По каждому разделу программы абитуриенту предлагались краткий вопрос по теории и дополняющая его задача. На выполнение всего задания отводилось четыре астрономических часа. Ниже приводятся примеры заданий профильного экзамена.

I. Механика

I.1. Дайте определение скорости материальной точки. Сформулируйте закон сложения скоростей.

Задача. Под каким углом α к горизонту нужно бросить тело, чтобы прямые, проведенные из точки бросания и точки падения в точку максимального подъема тела, составляли между собой прямой угол? Считайте, что точки бросания и падения находятся на одном горизонтальном уровне, а сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

I.2. Дайте определение силы тяжести. Как сила тяжести зависит от высоты над поверхностью Земли?

Задача. К потолку комнаты прикреплен конец невесомой нерастяжимой нити длиной $l = 4$ м. На другом конце нити закреплен маленький шарик. Расстояние от потолка до пола равно $l/2$. Слегка натянув нить, шарик отклонили так, чтобы нить приняла горизонтальное положение, а затем отпустили без толчка. В процессе движения шарик совершал с полом абсолютно упругие соударения. Пренебрегая влиянием воздуха, определите расстояние x между точками первого и третьего соударений шарика с полом. Числовой ответ выразите в метрах, округлив до десятых.

Условия задач

I.3. Дайте определение кинетической энергии материальной точки и системы материальных точек. Запишите формулу, связывающую изменение кинетической энергии тела и работу приложенных к телу сил.

Задача. Шероховатая наклонная плоскость, составляющая с горизонтом

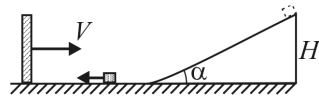


Рис. 27

угол α , имеет гладкий плавный переход на гладкую горизонтальную поверхность (рис. 27). Небольшой брусок, соскользнувший по наклонной плоскости с высоты H , скользит по горизонтальной поверхности.

Навстречу ему движется стальная плита, масса которой намного превышает массу бруска. С какой по модулю скоростью V должна двигаться плита, чтобы после абсолютно упругого удара об неё брусок поднялся по наклонной плоскости на ту же высоту H ? Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость равен μ .

II. Молекулярная физика и термодинамика

II.1. Дайте определение идеального газа. Запишите уравнение состояния идеального газа, указав смысл входящих в это уравнение величин.

Задача. С одноатомным идеальным газом проводят процесс, в котором внутренняя энергия газа пропорциональна квадрату объёма, который он занимает. Каково изменение ΔU внутренней энергии газа в таком процессе, если газу сообщили количество теплоты $Q = 20$ Дж.

II.2. Какой пар называют насыщенным? Дайте определение относительной влажности воздуха.

Задача. В закрытом сосуде при температуре t_1 находится воздух, относительная влажность которого ϕ_1 . Сосуд охлаждают до температуры t_2 . При этом часть паров конденсируется и образуется вода массой m . Определите объём сосуда, если давление насыщенных паров при начальной температуре равно $p_{н1}$, а при конечной – $p_{н2}$. Универсальная газовая постоянная R , молярная масса воды M .

II.3. Как зависят давление и плотность насыщенного пара от температуры? При каких условиях происходит кипение жидкости?

Задача. В цилиндре под поршнем находился влажный воздух с относительной влажностью $\varphi = 60\%$. При изотермическом уменьшении объёма воздуха в $n = 3$ раза сконденсировалось $m = 5$ г воды. Определите массу пара m_0 , первоначально содержащегося в цилиндре. Числовой ответ приведите в граммах, округлив до целых.

III. Электродинамика

III.1. Что такое электродвижущая сила (ЭДС) источника? Сформулируйте условия существования постоянного тока в цепи.

Задача. Нагревательный элемент, подключенный к аккумулятору с внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом, развивает мощность $N_1 = 50$ Вт. При подключении нагревательного элемента к двум таким аккумуляторам, соединенным последовательно, выделяемая в нагревателе мощность составила $N_2 = 72$ Вт. Найдите сопротивление R нагревателя.

III.2. Что такое омическое сопротивление проводника? Запишите формулу для расчёта сопротивления однородной проволоки и укажите смысл входящих в эту формулу величин.

Задача. Две одинаковые лампы накаливания мощностью $N_1 = 25$ Вт каждая, рассчитанные на напряжение $U = 10$ В, подключены параллельно к аккумулятору с внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом. После того, как одна из ламп перегорела, её заменили лампой мощностью $N_2 = 75$ Вт, рассчитанной на то же напряжение. Пренебрегая зависимостью сопротивления нити накала ламп от температуры, определите отношение n коэффициента полезного действия аккумулятора во втором случае к коэффициенту полезного действия аккумулятора в первом случае.

III.3. Запишите закон Ома для полной цепи. Какие соединения источников вы знаете?

Задача. Прямолинейный проводник согнут под углом $2\alpha = 60^\circ$ и помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл, направленной перпендикулярно плоскости проводника на нас. Перпендикулярно

Условия задач

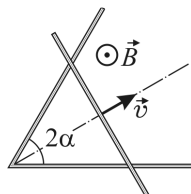


Рис. 28

биссектрисе угла по изогнутому проводнику двигают с постоянной скоростью $v = 1$ м/с проводящую перемычку (рис. 28). Каковы величина и направление тока I , текущего по образовавшемуся контуру, если перемычка начала движение от вершины угла? Сопротивление единицы длины проводника и перемычки $\rho = 1$ Ом/м.

IV. Оптика

IV.1. Сформулируйте законы преломления света. Дайте определения абсолютного и относительного показателя преломления.

Задача. На плоскую поверхность находящегося в воздухе прозрачного

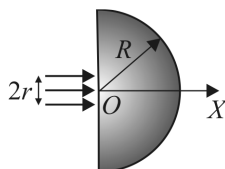


Рис. 29

полушара, радиус которого R , падает перпендикулярно к ней параллельный пучок света радиуса $r \ll R$ (рис. 29). На расстоянии $2R$ от плоской поверхности полушара (т.е. при $x = 2R$) радиус светового пучка становится равным $r/2$. Определите показатель преломления материала, из которого сделан полушар. При расчетах учтите, что для малых значений аргумента α , заданного в радианной мере, справедливо приближенное равенство $\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha \approx \alpha$.

IV.2. Какие линзы называются тонкими? Приведите примеры построения изображения предмета в собирающей и рассеивающей линзах.

Задача. Расстояние от предмета до переднего фокуса собирающей линзы в $k = 4$ раза меньше, чем расстояние от заднего фокуса линзы до изображения. Определите увеличение Γ , даваемое линзой.

IV.3. Запишите формулу тонкой линзы. Чему равно увеличение, даваемое линзой?

Задача. Точечный источник света S расположен на расстоянии $a = 2$ см от фокуса собирающей линзы на прямой, образующей угол $\alpha = 60^\circ$ с главной оптической осью. На каком расстоянии l от второго фокуса находится изображение S_1 источника? Фокусное расстояние линзы $f = 5$ см.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ – 2014»

I. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Задания для 7-х – 9-х классов

I.1. Предположим для определенности, что $N_1 > N_2$. Это означает, что первый раз Вася шел по ходу движения поезда, а второй раз – против, и поэтому во второй раз столбы относительно него двигались медленнее. Обозначим скорость движения Васи относительно вагона через u , а скорость движения поезда на этом перегоне – через V . Оба раза время движения Васи из конца в конец вагона $t = \frac{L}{u}$. При первом движении столбы сместились относительно Васи на расстояние $(V + u)t = N_1 D$, где D – искомое расстояние между столбами. Аналогично во втором случае $(V - u)t = N_2 D$. Вычитая почленно эти соотношения, получим $2ut = (N_1 - N_2)D = 2u \frac{L}{u} = 2L$, откуда $D = \frac{2L}{N_1 - N_2}$. При $N_1 < N_2$ (в первый раз Вася идет против хода поезда) надо просто поменять местами N_1 и N_2 . В общем случае $D = \frac{2L}{|N_2 - N_1|}$.

Ответ: $D = \frac{2L}{|N_2 - N_1|}$.

I.2. При взвешивании в банке находились камень объемом V_k и вода объемом $V_b = \frac{m_1 - m_k - m_0}{\rho_b}$. Следовательно, объем камня $V_k = V - \frac{m_1 - m_k - m_0}{\rho_b}$, а его плотность $\rho_k = \frac{m_k}{V_k} = \frac{\rho_b m_k}{\rho_b V - m_1 + m_k + m_0}$.

Подставляя имеющиеся числовые значения, находим, что

$$\rho_k \approx \frac{453,6 \cdot m_k}{0,74516 - 0,4536 \cdot (m_1 - m_k)}, \text{ где массы выражены в фунтах.}$$

Ответ: $\rho_k = \frac{\rho_v m_k}{\rho_v V - m_1 + m_k + m_0} \approx \frac{453,6 \cdot m_k}{0,74516 - 0,4536 \cdot (m_1 - m_k)}$.

I.3. Ясно, что для определения цвета бракадашки необходимо найти температуру t живой воды на момент проведения опыта. Уравнение теплового баланса для процесса нагревания груза после первого погружения $C(t - t_2) = C_k(t_2 - t_1)$, где C и C_k – теплоемкости груза и калориметра с водой соответственно. При втором погружении имеем $C(t - t_3) = C_k(t_3 - t_2)$. Разделив эти равенства друг на друга, находим

отношение $\frac{t - t_3}{t - t_2} = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$, откуда $t = \frac{t_2^2 - t_1 t_3}{2t_2 - t_1 - t_3}$. Для заданных число-

вых значений: $t = \frac{t_2^2 - t_1 t_3}{2t_2 - t_1 - t_3} = 56,45^\circ\text{C}$, что соответствует желтому

цвету бракадашки.

Ответ: $t = \frac{t_2^2 - t_1 t_3}{2t_2 - t_1 - t_3} = 56,45^\circ\text{C}$, цвет бракадашки – желтый.

I.4. Рассмотрим сначала подключение к точкам A и D источника с напряжением U . Для определенности будем считать, что к точке A подключен «плюс» источника, а к точке D – «минус». Пусть общий ток через источник $I = \frac{U}{R}$. Из симметрии схемы (рис. 30) ясно, что по двум

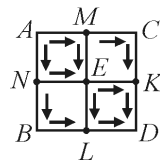


Рис. 30 сторонам рамки от точки A растекаются одинаковые токи по $\frac{I}{2}$, и к точке D стекаются токи по $\frac{I}{2}$. Кроме того, по перемычкам ME и NE от периметра к точке E стекаются, а по перемычкам EL и EK растекаются от точки E одинаковые токи, силу которых обозначим через I' . Тогда через точку C течет ток $\frac{I}{2} - I'$. Обозначив

через R_0 сопротивление половины стороны рамки, запишем формулы для напряжения между точками M и K , а именно, $I' \cdot 2R_0 = \left(\frac{I}{2} - I'\right) \cdot 2R_0$, откуда $I' = \frac{I}{4}$. Значит, $IR = U = U_{AM} + U_{ME} + U_{EK} + U_{KD} = R_0 \left(\frac{I}{2} + \frac{I}{4} + \frac{I}{4} + \frac{I}{2}\right) = \frac{3I}{2} R_0$, откуда $R_0 = \frac{2}{3} R$. При подключения напряжения U к точкам A и E заметим, что в силу симметрии напряжение между точками K и L равно нулю, и соединяющий их участок проволоки (содержащий точку D) можно убрать. Поскольку сопротивление участка, на котором соединены параллельно сопротивления R_0 и $3R_0$, равно $\frac{3}{4} R_0$, то схему можно преобразовать, как показано на рис. 31.

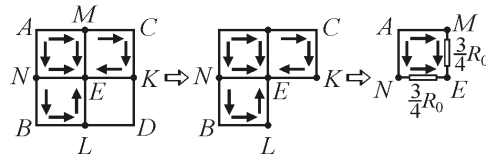


Рис. 31

Таким образом, сопротивление равно $R' = \frac{7}{8} R_0 = \frac{7}{12} R$.

Ответ: $R' = \frac{7}{12} R = 14$ Ом.

I.5. Для центрального соударения упругих колечек их скорости сразу после удара в проекции на направление первоначального движения первого колечка $v_{1,2}$ определяются законами сохранения энергии и импульса. Обозначив через v_0 начальную скорость колечка 1 , имеем

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_0, \quad \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_0^2}{2}. \text{ Из этих уравнений находим}$$

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \text{ и } v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0. \text{ Удобно ввести вспомогательную ве-}$$

личину $x \equiv \frac{|v_1|}{|v_2|} = \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{m_2}{m_1} \right|$. После удара каждое из колец движется под

действием силы трения скольжения. Его скорость уменьшается, причем величина ускорения равна μg , и поэтому тормозной путь связан с начальной скоростью следующим образом:

$$s = v \frac{v}{\mu g} - \frac{\mu g}{2} \left(\frac{v}{\mu g} \right)^2 = \frac{v^2}{2\mu g}.$$

Значит, $\frac{s_1}{s_2} = \frac{\mu_2 v_1^2}{\mu_1 v_2^2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} x^2$. Из этого соотношения выражаем

$$x = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{s_1}{s_2}}.$$

Поскольку нам известны только величины путей, но экспериментатор не указал, в какую сторону после удара движется первое колечко, то возможны две ситуации:

1) первое колечко отлетает назад ($v_1 < 0$) при $m_2 > m_1$, и в этом

$$\text{случае } \frac{m_2}{m_1} = 1 + 2x;$$

2) первое колечко продолжает двигаться вперед ($v_1 > 0$) при

$$m_2 < m_1, \text{ и в этом случае } \frac{m_2}{m_1} = 1 - 2x.$$

Что касается точности этих ответов, то она определяется точностью вычисления x . Поскольку коэффициенты трения измерены очень точно, то возможная погрешность связана только с неточностями в определении $s_{1,2}$. По порядку величины можно считать, что максимальная воз-

можная ошибка в определении $y \equiv \frac{m_2}{m_1}$ соответствует максимальной

$$\text{ошибке в определении путей } \Delta y \approx 2\Delta x \approx x \left(\frac{\Delta s_1}{s_1} + \frac{\Delta s_2}{s_2} \right) = x \left(\frac{0,5}{S_1} + \frac{0,5}{S_2} \right).$$

$$\text{Ответ: } \frac{m_2}{m_1} = 1 \pm 2x; \quad \Delta \left(\frac{m_2}{m_1} \right) \approx x \left(\frac{0,5}{S_1} + \frac{0,5}{S_2} \right) \text{ где } x = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{s_1}{s_2}}.$$

I.6. Поскольку ответ очень сильно зависит от конкретных значений параметров задачи, проведем общее исследование для всех вариантов с данными в условии значениями m , M , μ_1 и μ_2 .

Так как доска очень легкая, то силы нормальной реакции, действующие на доску со стороны брусков, равны $N_2 \approx N_1 = Mg$, и максимальное значение силы трения покоя $F_2 \approx F_1 = 0,75 \cdot Mg$. На нижний брусок со стороны поверхности действует сила нормальной реакции $N_3 \approx 2Mg$, и здесь $F_3 \approx 0,5 \cdot Mg$, то есть скольжение начнется именно на этой поверхности. Когда сила натяжения нити превысит это значение, доска начнет двигаться вместе с обоими брусками. В состоянии покоя груз создает натяжение нити, равное $T = 0,5 \cdot mg$, поэтому доска остается в покое при $m \leq M$, а при $m > M$ движется.

Рассмотрим совместное движение доски и обоих брусков. Всякое смещение груза вниз вызывает вдвое большее смещение доски, то есть при ускорении груза a ускорение доски с брусками равно $2a$. По второму закону Ньютона имеем $2M \cdot 2a = T - 0,5 \cdot Mg$, $ma = mg - 2T$, откуда $a = \frac{m - M}{m + 8M} g$.

Но необходимо учесть, что такое движение возможно, пока сила трения между доской и нижним бруском, который тормозит сила трения скольжения со стороны поверхности, может сообщать ему ускорение $2a$, т.е. $F_2 = 2Ma + 0,5 \cdot Mg = \frac{M(5m + 4M)}{2(m + 8M)} g$. С другой стороны, эта сила не должна превосходить $0,75 \cdot Mg$, и поэтому полученная формула правильно описывает ускорение груза при $\frac{M(5m + 4M)}{2(m + 8M)} g \leq \frac{3}{4} Mg$, или

$m \leq \frac{16}{7} M$. При $m > \frac{16}{7} M$ доска начинает скользить по нижнему бруску, а сила трения между ними становится силой трения скольжения. Верхний брусок по-прежнему движется вместе с доской, и уравнение движения этой системы тел $M \cdot 2a = T - 0,75 \cdot Mg$, и вместе с уравнением движения груза $ma = mg - 2T$ оно позволяет получить новую формулу для ускорения $a = \frac{2m - 3M}{2(m + 4M)} g$. Снова нужно проверить, что сила

трения между доской и верхним бруском может сообщать ему вдвое большее ускорение, не превышая при этом $0,75 \cdot Mg$. Имеем

$F_1 = 2Ma \leq 0,75 \cdot Mg$, откуда $m \leq \frac{24}{5}M$. Наконец, при $m > \frac{24}{5}M$ доска

уже выскальзывает из промежутка между брусками. Ее тормозит суммарная сила трения, равная теперь $1,5 \cdot Mg$, и тянет вперед сила натяжения нити. Так как доска очень легкая, то $T \approx 1,5 \cdot Mg$, и ускорение груза определяется из его уравнения движения $ma = mg - 2T \approx (m - 3M)g$,

откуда $a = \frac{m - 3M}{m}g$. Объединяя все случаи, получаем общую формулу:

$$a = \begin{cases} 0 & \text{при } m \leq M; \\ \frac{m - M}{m + 8M}g & \text{при } M < m \leq \frac{16}{7}M; \\ \frac{2m - 3M}{2(m + 4M)}g & \text{при } \frac{16}{7}M < m \leq \frac{24}{5}M; \\ \frac{m - 3M}{m} & \text{при } m > \frac{24}{5}M. \end{cases}$$

При решении задачи необходимо воспользоваться этой формулой дважды – сначала для заданной в условии массы груза m , а затем для удвоенной, т.е. $m \rightarrow 2m$.

Ответ: $a = 0$ при $m \leq M$; $a = \frac{m - M}{m + 8M}g$ при $M < m \leq \frac{16}{7}M$;

$a = \frac{2m - 3M}{2(m + 4M)}g$ при $\frac{16}{7}M < m \leq \frac{24}{5}M$; $a = \frac{m - 3M}{m}$ при $m > \frac{24}{5}M$.

Задания для 10-х –11-х классов

Второй тур

1.7. Для того чтобы время полета было минимальным, надо лететь по прямой. Скорость Гваихира в проекции на эту прямую, когда ветер ему мешает $v_1 = v \cos \beta - u \cos \alpha$, где $v = \frac{L}{t_0}$ – его скорость относительно воздуха, а β – угол между этой прямой и направлением его ско-

рости относительно воздуха. Условие движения по нужной прямой – это равенство перпендикулярных ей составляющей скоростей, т.е.

$v \sin \beta = u \sin \alpha$, поэтому $v_1 = \sqrt{v^2 - u^2 \sin^2 \alpha} - u \cos \alpha$. Аналогично для случая, когда ветер помогает Гвахиру лететь

$v_2 = \sqrt{v^2 - u^2 \sin^2 \alpha} + u \cos \alpha$. Значит, $t_{\min} = \frac{L}{v_1} + \frac{L}{v_2} = \frac{2L\sqrt{v^2 - u^2 \sin^2 \alpha}}{v^2 - u^2}$.

Окончательно получаем: $t_{\min} = t_0 \frac{2L\sqrt{L^2 - u^2 t_0^2 \sin^2 \alpha}}{L^2 - u^2 t_0^2}$.

Ответ: $t_{\min} = t_0 \frac{2L\sqrt{L^2 - u^2 t_0^2 \sin^2 \alpha}}{L^2 - u^2 t_0^2}$.

I.8. Если диод открыт, то токи I_1 и I_2 , текущие в ветвях с аккумуляторами, по закону Ома удовлетворяют соотношением $\mathcal{E}_1 - I_1 r_1 = IR_{\text{н}}$, $\mathcal{E}_2 - I_2 r_2 = IR_{\text{н}}$, где $R_{\text{н}}$ – сопротивление нагрузки. Отсюда

$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} - \frac{R_{\text{н}}}{r_1} I$, $I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} - \frac{R_{\text{н}}}{r_2} I$. Подставляем эти соотношения в закон

непрерывности тока $I = I_1 + I_2$ и находим, что $I = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R_{\text{н}}(r_1 + r_2)}$. По-

этому мощность, выделяющаяся при открытом диоде

$P = I^2 R_{\text{н}} = \left(\frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R_{\text{н}}(r_1 + r_2)} \right)^2 R_{\text{н}}$. Условие, что диод открыт, выполня-

ется, если $I_2 > 0$, т.е. если $\mathcal{E}_2 > R_{\text{н}} I$, или $R_{\text{н}} < \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2} r_1$. При

$R_{\text{н}} > \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2} r_1$ диод заперт, и тогда ток в нагрузке $I = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R_{\text{н}}}$, а выде-

ляющаяся мощность $P' = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R_{\text{н}}} \right)^2 R_{\text{н}}$. Но в действительности при зна-

чениях R и r_1 , заданных в условии, всегда $2R < \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2} r_1 = 2r_1$, то есть

диод всегда открыт. Поэтому

$$n \equiv \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{\epsilon_1 r_2 + \epsilon_2 r_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)} \right)^2 R \left(\frac{r_1 r_2 + 2R(r_1 + r_2)}{\epsilon_1 r_2 + \epsilon_2 r_1} \right)^2 \frac{1}{2R} = \frac{1}{2} \left[\frac{r_1 r_2 + 2R(r_1 + r_2)}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)} \right]^2.$$

С учетом известных числовых значений получим, что

$$n = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{14(r_1 + r_2) + r_1 \cdot r_2}{7(r_1 + r_2) + r_1 \cdot r_2} \right]^2. \quad \text{Ответ: } n = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{r_1 r_2 + 2R(r_1 + r_2)}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)} \right]^2.$$

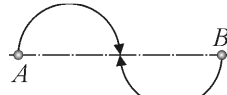


Рис. 32

I.9. «Точный баланс», как нетрудно заметить, состоит в том, что сила кулоновского отталкивания шариков в точности уравновешивает силу их гравитационного притяжения. Следовательно, шарики просто совершают движение по окружностям одинакового радиуса R с постоянными по величине скоростями. По

второму закону Ньютона имеем $m \frac{v^2}{R} = qvB$, откуда $R = \frac{mv}{qB} =$

$= \frac{v}{2B\sqrt{\pi\epsilon_0 G}}$. Для столкновения шариков в момент первого возвращения на прямую AB (рис. 32) нужно, чтобы выполнялось равенство

$l = 4R = \frac{2v}{B\sqrt{\pi\epsilon_0 G}}$. Отсюда $B = \frac{2v}{l\sqrt{\pi\epsilon_0 G}}$. Подставляя числовые значения,

получаем, что $B = 46,42 \cdot \frac{v}{l}$. **Ответ:** $B = \frac{2v}{l\sqrt{\pi\epsilon_0 G}}$.

I.10. В момент, когда правый груз опустится на расстояние x от начального положения, оба груза, все элементы веревки и все массивные элементы внешнего обода колеса двигаются с одной и той же по модулю скоростью, которую обозначим через v . Массивные элементы втулки в этот же момент времени двигаются со скоростью $v/3$. Поэтому мгновенное значение кинетической энергии системы

$$E_k = \frac{(m + m + m + M/4)v^2}{2} + \frac{(3M/4)(v/3)^2}{2} = \frac{(9m + M)v^2}{6}.$$

Если потенциальную энергию отсчитывать от начального положения шариков, то нетрудно заметить, что ее изменение к этому моменту связано лишь с

перемещением куска веревки длиной x и массой $\Delta m = \frac{m}{L}x$ из положения, в котором ее центр масс находился на высоте $\frac{x}{2}$ над уровнем начального положения шариков в положение, в котором он находился на высоте $\frac{x}{2}$ под этим уровнем. Следовательно, потенциальная энергия $U(x) = \Delta m g \left(-\frac{x}{2} - \frac{x}{2} \right) = -\frac{mg}{L}x^2$. Полная механическая энергия сохраняется, поэтому $\frac{(9m+M)v^2}{6} - \frac{mg}{L}x^2 = \text{const}$. Рассмотрим изменения координат и скорости за малое время dt и найдем ускорение каждого из грузов. Имеем $\frac{(9m+M)v \cdot dv}{3} = \frac{mg}{L}2x dx = \frac{2mg}{L}xv \cdot dt$, откуда $a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{6mg}{(9m+M)L}x$. Учтем, что расстояние между грузами по вертикали $h = 2x$, а относительное ускорение $a = 2a_x$, и найдем, что $a = \frac{6mgh}{(9m+M)L}$. Для численного ответа с учетом того, что h дано в см, а L в м, получаем, что $a = 0,588 \cdot \frac{m \cdot h}{M + 9m}$. **Ответ:** $a = \frac{6mgh}{(9m+M)L}$.

I.11. На представленной диаграмме адиабатное расширение – это процесс 3–4. В адиабатном процессе $A_{34} + \Delta U_{34} = 0$, откуда $A_{34} = -\Delta U_{34}$. С другой стороны, полное изменение внутренней энергии в циклическом процессе равно нулю, и ее изменение в изотермических процессах тоже равно нулю. Поэтому $\Delta U_{12} + \Delta U_{34} = 0$ и $A_{34} = \Delta U_{12}$. Рассмотрим процесс 1–2, в котором $\frac{pV}{\nu R} = T = c \cdot V^2$, откуда $p = \nu R c \cdot V$. Следовательно, работу газа в процессе 1–2 можно вычислить как площадь трапеции, т.е.

$$A = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) = \frac{\nu R c}{2} (V_2^2 - V_1^2) = \frac{\nu R}{2} (T_2 - T_1) = \frac{\nu R}{2} (n-1) T_1.$$

Изменение внутренней энергии газа в этом процессе $\Delta U_{12} = \frac{3\nu R}{2} (T_2 - T_1) = 3A$. Таким образом, работа при адиабатном расширении $A_{34} = 3A$. **Ответ:** $A = 3A$.

Третий тур

I.12. В системе отсчета, связанной с камнем, брошенным Галилеем, камень, брошенный мальчиком, движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$. Минимальное расстояние между камнями l_{\min} равно длине перпендикуляра, опущенного из точки бросания камня Галилея на линию движения камня мальчика (рис. 33). Как видно из построения,

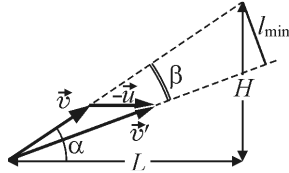


Рис. 33

$l_{\min} = \sqrt{L^2 + H^2} \cdot \sin \beta$. С другой стороны, по теореме синусов имеем $\sin \beta = \sin \alpha \frac{u}{v'}$. Учитывая, что $\sqrt{L^2 + H^2} \cdot \sin \alpha = H$ и что $\cos \alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2 + H^2}} = \frac{4}{5}$, получаем, что

$$l_{\min} = \frac{uH}{\sqrt{u^2 + v^2 + uv \cdot 2L/\sqrt{L^2 + H^2}}}. \text{ Подставляя числовые данные, имеем } l_{\min} = \frac{51u}{\sqrt{u^2 + v^2 + 8uv/5}}. \text{ Ответ: } l_{\min} = \frac{uH}{\sqrt{u^2 + v^2 + uv \cdot 2L/\sqrt{L^2 + H^2}}}.$$

I.13. При касании двух проводящих тел их общий заряд распределяется между ними в пропорции, определяемом геометрическими параметрами (размерами и относительным положением тел). При касании двух шаров, удаленных от остальных тел, эта пропорция определяется только соотношением их радиусов и поэтому одинакова для всех касаний в нашей системе. Пусть меньший шарик получает долю z от общего заряда. Очевидно, что больший шар получает при этом долю

$1-z$ от общего заряда, причем z должно быть меньше 0,5. Тогда после первого касания заряд меньшего шарика $q_1 = zQ$, а заряд первого шара после этого касания $Q_1 = (1-z)Q$. После касания второго шара $q_2 = z(Q + zQ) = z(1+z)Q$, причем $Q_2 = (1-z)(Q + zQ) = (1-z^2)Q$. В соответствии с условием задачи $\frac{Q_2}{Q_1} = 1+z = 1 + \frac{n}{100}$, откуда $z = \frac{n}{100}$. Продолжая аналогичные рассуждения, найдем, что $q_3 = z[Q + z(1+z)Q] = z(1+z+z^2)Q, \dots, q_{2014} = z(1+z+z^2+\dots+z^{2013})Q$. С точностью, требуемой в ответе, для всех возможных n сумма в скобках равна полной сумме геометрической прогрессии: $1+z+z^2+\dots+z^{2013} \approx \frac{1}{1-z}$. Поэтому $q_{2014} \approx \frac{z}{1-z}Q = \frac{n}{100-n}Q$. С учетом единиц измерения получаем, что $q \approx \frac{1000n}{100-n}Q$.

Можно обойтись без суммирования прогрессии. Для этого, рассмотрев два касания и установив, что $z = \frac{n}{100} < 0,1$, можно заметить, что передаваемый при касании заряд будет быстро убывать с ростом номера касания. Поэтому при достаточно больших номерах $k \gg 1$ процесс должен стать «практически установившимся» – в рамках требуемой точности передача заряда становится пренебрежимо малой. Это означает, что для таких k имеет место равенство $\frac{q_k}{Q_k} = \frac{z}{1-z}$ и $Q_k \approx Q$, откуда $q_k \approx \frac{z}{1-z}Q = \frac{n}{100-n}Q$. **Ответ:** $q \approx \frac{n}{100-n}Q$.

I.14. При равномерном подъеме шарика сила сопротивления воздуха уравнивает его подъемную силу \vec{F} , равную векторной сумме силы Архимеда и силы тяжести, т.е. $\vec{F} = \vec{F}_A + m\vec{g}$, или $F = F_A - mg$. Имеем $\beta v_0^2 = F$. В системе отсчета, связанной с велосипедом, равновесие шарика обеспечивается силой натяжения нити, которая уравнивает подъемную силу и горизонтальную силу сопротивления воздуха (рис. 34). Отметим, что усло-

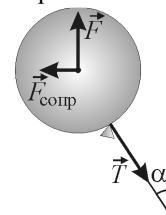


Рис. 34

вие постоянства угла наклона нити α указывает на возможность пренебрежения весом самой нити. Таким образом $T \sin \alpha = \beta(v+u)^2$
 $T \cos \alpha = F = \beta v_0^2$. Разделив эти соотношения друг на друга, находим, что $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{(v+u)^2}{v_0^2}$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg} \left[\frac{(v+u)^2}{v_0^2} \right]$.

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg} \left[\frac{(v+u)^2}{v_0^2} \right]$.

I.15. Рассмотрим сначала движение тяжелого шара до соударения с легким. В этом случае его потенциальная энергия переходит в кинетическую, и перед ударом тяжелый шар движется горизонтально со скоростью u_0 , определяемой из уравнения $Mgl[1 - \cos \alpha] = \frac{Mu_0^2}{2}$, откуда $u_0 = \sqrt{2gl[1 - \cos \alpha]}$. Теперь рассмотрим удар. Лучше всего анализировать его в системе отсчета, связанной с налетающим тяжелым шаром. В этой системе легкий шар налетает на тяжелый со скоростью u_0 , и в результате упругого центрального удара отскакивает обратно с той же скоростью. Соответственно, относительно Земли сразу после удара легкий шар движется со скоростью $v_0 = 2u_0 = 2\sqrt{2gl[1 - \cos \alpha]}$. Наконец, перейдем к анализу движения легкого шара. Пока нить натянута, он движется по дуге окружности радиуса l под действием сил тяжести и натяжения нити. В положении, в котором его нить отклонилась от вертикали на угол φ , центростремительная компонента его ускорения определяется из уравнения $m \frac{v^2}{l} = T - mg \cos \varphi$. С другой стороны, из закона сохранения энергии, а именно $\frac{mv^2}{2} + mgl(1 - \cos \varphi) = \frac{mv_0^2}{2}$, находим, что $v^2 = v_0^2 - 2gl(1 - \cos \varphi)$. Угол φ_0 , при котором скорость шарика обратится в нуль, определяется соотношением $\cos \varphi_0 = 1 - \frac{v_0^2}{2gl} = 4 \cos \alpha - 3$. Из этого соотношения, в частности, видно, что для заданных в условии

значениях α легкий шар поднимается выше точки подвеса. Найдем теперь закон изменения силы натяжения нити в процессе движения. Из уравнения движения шарика имеем

$$T = mg \cos \varphi + m \frac{v^2}{l} = \frac{m}{l} [v_0^2 + gl(3 \cos \varphi - 2)].$$

Отсюда, полагая $T = 0$, найдем уравнение для угла φ_1 , при котором перестает выполняться предположение о том, что нить натянута:

$$\cos \varphi_1 = \frac{1}{3} \left(2 - \frac{v_0^2}{gl} \right) = \frac{2}{3} [4 \cos \alpha - 3].$$

Для заданных α всегда $\varphi_1 < \varphi_0$, то есть нить провисает, когда легкий шар еще продолжает подъем. После провисания нити шар движется только под действием силы тяжести, то есть по параболе. Начальная скорость для такого движения

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gl(1 - \cos \varphi_1)} = \sqrt{\frac{v_0^2 - 2gl}{3}} = \sqrt{\frac{2gl}{3}(3 - 4 \cos \alpha)},$$

а угол вылета по отношению к горизонту $\beta = \pi - \varphi_1$ и $\cos \beta = \frac{2}{3}(3 - 4 \cos \alpha)$. Максимальная высота подъема соответствует минимальному модулю скорости

$v_{\min} = v_1 \cos \beta$. Итак,

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 - v_{\min}^2}{2g} = 4l(1 - \cos \alpha) - \frac{4l}{27}(3 - 4 \cos \alpha)^3 = \frac{4 \cos \alpha [9 - 8 \cos \alpha]^2}{27} l.$$

Ответ: $h_{\max} = \frac{4 \cos \alpha [9 - 8 \cos \alpha]^2}{27} l$.

I.16. Пусть давление насыщенных паров воды при температуре системы равно p_0 . В соответствии с условием, $p_0 S = k \frac{x_0}{2}$, откуда

$\frac{p_0 S}{k} = \frac{1}{2} x_0$. Здесь S и k – площадь сечения трубы и жесткость пружины. Обозначив через v количество молей сухого воздуха между поршнем 2 и закрытым торцом трубы, запишем условие равновесия поршня 2

в начальном состоянии. Имеем $\left(f_0 p_0 + \frac{vRT}{x_0 S} \right) S = kx_0$, откуда

$f_0 \frac{x_0}{2} + \frac{\nu RT}{kx_0} = x_0$ и $\frac{\nu RT}{k} = \frac{x_0^2(2-f_0)}{2}$. Поскольку во всех вариантах $nf_0 > 100\%$, то в процессе изотермического сжатия этого объема обязательно начнется конденсация водяного пара, и пар в конечном состоянии будет насыщенным. Пренебрегая объемом образовавшейся воды, запишем условие равновесия поршня 2 в конечном состоянии. Поскольку деформация пружины теперь равна $l + \frac{x_0}{n}$, условие равновесия имеет вид $\left(p_0 + n \frac{\nu RT}{x_0 S}\right) S = k \left(l + \frac{x_0}{n}\right)$, откуда $\frac{x_0}{2} + n \frac{x_0(2-f_0)}{2} = l + \frac{x_0}{n}$ и $l = \frac{(2-f_0)n^2 + n - 2}{2n} x_0$. **Ответ:** $l = \frac{n^2(2-f_0/100) + n - 2}{2n} x_0$.

II. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Задания для 7-х – 9-х классов

II.1. Пусть x_1 и x_2 – массы тел, подвешенных к левому и правому концам стержня, $l_1 = 25$ см – расстояние от точки закрепления стержня до его левого конца, $l_2 = 25$ см – расстояние от точки закрепления стержня до его центра, $l_3 = 75$ см – расстояние от точки закрепления стержня до его правого конца, M – масса стержня. Тогда условие равновесия "весов" Наземникуса имеет вид $x_1 g l_1 = M g l_2 + x_2 g l_3$, откуда $x_1 = 0,3 + 3x_2$. Обозначив через m_1 массу золотого слитка, а через m_2 массу слитка из неизвестного сплава в килограммах, подставляем в последнее уравнение то, что получилось при взвешиваниях. Имеем

- 1) $m_1 > 0,3 + 3m_2$;
- 2) $m_1 < 0,3 + 3m_2$;
- 3) $m_2 < 0,3$;
- 4) $m_2 > 0,23$ ($1 < 0,3 + 3m_2$).

Максимально возможное при таких условиях значение m_1 составляет 13,2 кг. Следовательно, Наземникус может безопасно вынести из хранилища 5 слитков (точно не больше 66 кг). **Ответ:** 5 слитков.

II.2. Пусть V_0 – начальный объем воды в колодце, m_0 – начальная масса льда, m – масса золотого слитка. До того, как лед начал таять, объем под поверхностью воды был равен сумме V_0 и объема вытесненной воды, который, согласно закону Архимеда, равен $\frac{m_0 + m}{\rho_0}$.

Итак, $V_1 = V_0 + \frac{m_0 + m}{\rho_0}$. После таяния льда из него образовалась вода

объемом $\frac{m_0}{\rho_0}$, а слиток золота объемом $\frac{m}{\rho}$ утонул. Поэтому объем под

поверхностью стал равным $V_2 = V_0 + \frac{m_0}{\rho_0} + \frac{m}{\rho}$, и понижение уровня воды

в колодце составило величину $\Delta h_1 = \frac{V_1 - V_2}{S} = \frac{m}{S} \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho} \right)$. После извле-

чения слитка объем под поверхностью воды уменьшится еще на объем слитка и приобрел значение $V_3 = V_0 + \frac{m_0}{\rho_0}$. Поэтому $\Delta h_2 = \frac{V_2 - V_3}{S} = \frac{m}{S\rho}$.

Из этих соотношений легко выразить: $m = \rho_0 S (\Delta h_1 + \Delta h_2) \approx 5$ кг, и

$$\rho = \frac{m}{S \Delta h_2} = \rho_0 \frac{\Delta h_1 + \Delta h_2}{\Delta h_2} \approx 19,2 \text{ г/см}^3.$$

Ответ: $m = \rho_0 S (\Delta h_1 + \Delta h_2) \approx 5$ кг, $\rho = \rho_0 \frac{\Delta h_1 + \Delta h_2}{\Delta h_2} \approx 19,2 \text{ г/см}^3$. Таким

образом, на самом деле Наземникус мог вынести из сейфа (см. задачу II.1) 13 слитков независимо от ошибок округления при расчетах.

II.3. Прежде всего, нужно заметить, что сопротивление идеального амперметра равно нулю (соответствующий участок цепи можно замкнуть), а идеального вольтметра – бесконечно велико (участок можно разомкнуть). Поэтому для расчета токов и напряжений можно использовать схему, изображенную на рис. 35. Полное сопротивление цепи между клеммами A и B

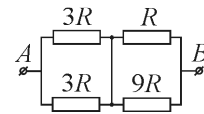


Рис.35

$$R_0 = \frac{3R \cdot 3R}{3R + 3R} + \frac{R \cdot 9R}{R + 9R} = 2,4R = 24 \text{ Ом}, \quad \text{а полный ток в цепи}$$

$I = \frac{5U}{12R} = 2 \text{ А}$. Этот ток делится поровну между сопротивлениями $3R$
 (по $I_1 = \frac{5U}{24R} = 1 \text{ А}$) и в соотношении 1:9 между сопротивлениями $9R$ и
 R ($I_2 = \frac{U}{24R} = 0,2 \text{ А}$ и $I_3 = \frac{3U}{8R} = 1,8 \text{ А}$ соответственно). Из баланса то-
 ков в узлах «закороченной» ветви видно, что через амперметр течет ток
 $I_A = I_3 - I_1 = \frac{U}{6R} = 0,8 \text{ А}$ снизу вверх. Напряжение на вольтметре равно
 разности напряжений на трех лампах «слева» и одного резистора «сле-
 ва»: $U_V = I_1 3R + I_2 6R - I_1 R = \left(3 \frac{5}{24} + 6 \frac{1}{24} - \frac{5}{24} \right) U = \frac{2}{3} U = 32 \text{ В}$.
Ответ: $I_A = \frac{U}{6R} = 0,8 \text{ А}$, $U_V = \frac{2}{3} U = 32 \text{ В}$.

П.4. При постоянной скорости ускорение левого груза вместе с
 прикрепленным к нему роликом равно нулю. Следовательно, сумма
 приложенных к этой системе тел сил равна нулю – удвоенная сила на-
 тяжения нити уравнивает суммарный вес тел, и величина силы на-
 тяжения $T = 2mg$, где g – ускорение свободного падения. Теперь из
 уравнения движения для правого груза, а именно $3ma = 3mg - T = mg$,
 можно найти его ускорение $a = \frac{1}{3}g$, которое направлено вниз. По-
 скольку нить нерастяжима, сумма длин ее вертикальных участков
 должна оставаться неизменной, поэтому в любой момент времени сум-
 ма скоростей грузов в проекции на вертикаль должна равняться удвоен-
 ной скорости правого ролика, и, следовательно, сумма их ускорений
 равна удвоенному ускорению этого ролика. Имеем $0 + a = 2a'$, откуда
 $a' = \frac{1}{2}a = \frac{1}{6}g$. Остается записать уравнение движения для правого ро-
 лика $ma' = 2T + mg - F$ и найти из него величину силы:
 $F = 4mg + mg - \frac{mg}{6} = \frac{29}{6}mg$. **Ответ:** $F = \frac{29}{6}mg$; $a = \frac{1}{3}g$ и направлено
 вниз.

Задания для 10-х – 11-х классов

Механика

II.5. За малое время упругого соударения шариков массами m их координаты практически не меняются, и шарик массой $2m$ не успевает прийти в движение. Следовательно, этот шарик не оказывает влияния на результат соударения шариков массами m . В соответствии с законами сохранения импульса и энергии шарики массами m обмениваются скоростями, т.е. двигавшийся шарик остановится, а покоившийся – приобретет скорость v_0 . Центр масс шариков, связанных нитью, находящийся на расстоянии $\frac{2}{3}l$ от шарика массой m и на расстоянии $\frac{1}{3}l$ от шарика

массой $2m$, начнет движение с постоянной скоростью $v_{\text{цм}} = \frac{v_0}{3}$. Относительно центра масс шарики будут двигаться по окружностям с угловой скоростью $\omega = \frac{v_0 - v_0/3}{2l/3} = \frac{v_0}{l}$. При этом ускорение a_2 шарика массой $2m$ равно $a_2 = \omega^2 \cdot \frac{l}{3} = \frac{v_0^2}{3l}$, а сила натяжения нити, вызывающая это

ускорение, $T = \frac{2mv_0^2}{3l}$. **Ответ:** $T = \frac{2mv_0^2}{3l}$, $a_2 = \frac{v_0^2}{3l}$

II.6. Пусть S – площадь поперечного сечения жгута, T – сила натяжения в кольце. Рассмотрим малый участок кольца длиной $\Delta l = R\Delta\vartheta$ и массой $\Delta m = \rho SR\Delta\vartheta$. Этот участок находится под действием сил натяжения \vec{T}_1 и \vec{T}_2 (см. верхнюю часть рис. 36), направленных под углом $\Delta\vartheta$ друг к другу. Векторная сумма $\Delta\vec{T}$ этих сил (см. нижнюю часть рис. 36) вызывает центростремительное ускорение выделенного участка кольца, по модулю равное $a = \omega^2 R$. Учитывая, что угол $\Delta\vartheta$ мал, находим, что $\Delta T \approx T\Delta\vartheta$. По второму закону Ньютона $\Delta m\omega^2 R = \Delta T$, откуда сила натяжения кольца $T = \rho S\omega^2 R^2$. По закону Гука относительное удлине-

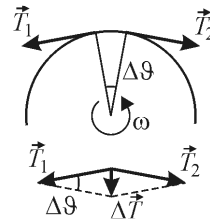


Рис. 36

ние кольца $\varepsilon = \frac{T}{ES}$. Учитывая, что $\varepsilon = \frac{\Delta l}{2\pi R}$, находим искомую величину $\Delta l = \frac{2\pi\rho R^3\omega^2}{E}$. **Ответ:** $\Delta l = \frac{2\pi\rho R^3\omega^2}{E}$.

II.7. Уголок находится в равновесии под действием сил, изображенных на рис. 37, где $m\vec{g}$ – сила тяжести, \vec{F} – сила реакции шарнира,

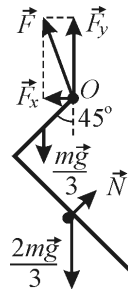


Рис. 37

\vec{N} – сила реакции гвоздя. Условия равновесия уголка имеют вид: для сил в проекции на горизонтальную ось $F_x = N \sin 45^\circ$, для сил в проекции на вертикальную ось $F_y = mg - N \cos 45^\circ$, для моментов сил относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку O $\frac{mg}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} = Na$. Из записанной системы уравнений находим, что $F_x = \frac{mg}{12}$, $F_y = \frac{11}{12}mg$. Модуль искомой силы

реакции шарнира $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{\sqrt{122}}{12}mg$.

Ответ: $F = \frac{\sqrt{122}}{12}mg \approx 0,55 \text{ Н}$.

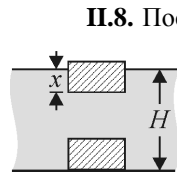


Рис. 38

II.8. Поскольку кинетическая энергия параллелепипеда в начальном конечном его состояниях равна нулю, по закону сохранения энергии количество теплоты, выделившееся при всплывании параллелепипеда, равно разности работы архимедовой силы и приращения потенциальной энергии параллелепипеда. Пусть x – глубина погружения плавающего параллелепипеда (рис. 38). Из

условия его плавания, а именно $\rho_1 Shg = \rho Sxg$, находим, что $x = h \frac{\rho_1}{\rho}$.

Приращение потенциальной энергии параллелепипеда в поле тяжести Земли $\Delta E_n = mg(H - x)$, а работа архимедовой силы $A = A_1 + A_2$, где

$A_1 = \rho Shg(H - h)$ – работа постоянной силы ρShg при подъеме парал-

лелепипеда до поверхности воды, $A_2 = \rho S g \frac{h+x}{2}(h-x)$ – работа средней силы $\rho S g \frac{h+x}{2}$ при подъеме параллелепипеда до положения равновесия. По закону сохранения энергии $Q = A - \Delta E_n$. Из записанных уравнений находим, что $Q = \frac{Shg}{2\rho}(\rho - \rho_1)[2\rho H - (\rho + \rho_1)h]$.

Ответ: $Q = \frac{Shg}{2\rho}(\rho - \rho_1)[2\rho H - (\rho + \rho_1)h] = 14,8$ кДж.

П.9. Обозначим через V объем всего тела, а через V_2 – объем части тела, находящейся в нижней жидкости. Условие плавания тела на границе раздела жидкостей имеет вид $\rho V g = \rho_1(V - V_2)g + \rho_2 V_2 g$. Отсюда

$$n = \frac{V_2}{V} = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}. \quad \text{Ответ: } n = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{1}{3}.$$

П.10. По второму закону Ньютона в момент, когда тело массой m занимает самое нижнее положение, справедливы уравнения $ma = F_1 - mg$, $N_1 - F_1 - Mg = 0$, где F_1 – сила упругости, возникающая в пружине, N_1 – сила взаимодействия нижнего тела с поверхностью стола. Отсюда $N_1 = (M + m)g + ma$. Аналогично, в момент, когда тело массой m занимает самое верхнее положение, имеем $ma = F_2 + mg$, $N_2 + F_2 - Mg = 0$, откуда $N_2 = (M + m)g - ma$. Поскольку ускорение тела массой m максимально в крайних положениях этого тела, и равно по модулю $a = A\omega^2$, то искомое отношение

$$n = \frac{N_1}{N_2} = \frac{(M + m)g + mA\omega^2}{(M + m)g - mA\omega^2}. \quad \text{Отметим, что этот ответ является корректным, если нижнее тело не отрывается от поверхности стола, т.е. при } A < \frac{(m + M)g}{M\omega^2}. \quad \text{Ответ: } n = \frac{(M + m)g + mA\omega^2}{(M + m)g - mA\omega^2} \text{ при } A < \frac{(m + M)g}{M\omega^2}.$$

П.11. Решение: Направим ось OY вертикально вниз. В положении равновесия грузов по второму закону Ньютона имеем уравнения

$m_1g - T = 0$, $m_2g + ky_0 - 2T = 0$, где y_0 – удлинение пружины в положении равновесия, T – сила натяжения нити. Из этих уравнений получаем, что $y_0 = \frac{(2m_1 - m_2)g}{k}$. По закону сохранения энергии для колеблю-

щихся грузов $\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2}{2}\left(\frac{v_1}{2}\right)^2 + \frac{ky_0^2}{2} = -m_1gs + m_2g\frac{s}{2} + \frac{k}{2}\left(y_0 + \frac{s}{2}\right)^2$, где

v_1 – максимальная скорость груза массой m_1 (скорость второго груза при натянутой нити в два раза меньше). Упростив последнее уравнение,

получаем, что $4m_1v_1^2 + m_2v_1^2 = k^2s^2$, откуда $v_1 = s\sqrt{\frac{k}{4m_1 + m_2}}$. Отметим,

что амплитуда ускорения груза массой m_1 не может быть больше ускорения свободного падения g , что соответствует провисанию нити. Предлагаем самостоятельно убедиться в том, что провисания нити не будет,

если $s \leq \frac{(4m_1 + m_2)g}{k}$.

Ответ: $v_1 = s\sqrt{\frac{k}{4m_1 + m_2}}$, $v_2 = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{k}{4m_1 + m_2}}$ при $s \leq \frac{(4m_1 + m_2)g}{k}$. При

$s > \frac{(4m_1 + m_2)g}{k}$ колебания грузов не будут гармоническими.

Молекулярная физика и термодинамика

П.12. Силу давления атомов на подложку можно вычислить через изменение импульса потока атомов серебра, налипающих на подложку:

$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}mv \cdot nSv\Delta t = 2nSE$. Здесь n – концентрация атомов в пучке,

v – скорость атомов, движущихся к подложке, а S – площадь подложки.

Отсюда следует, что $n = \frac{P}{2E}$. Масса серебра, осаждаемого на подложку

в единицу времени

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}m \cdot nSv\Delta t = nS\sqrt{2mE} = nS\sqrt{\frac{2\mu E}{N_A}} = pS\sqrt{\frac{\mu}{2N_A E}}.$$

Скорость роста толщины слоя вычисляется по изменению объема ΔV напыленного серебра, а именно $u = \frac{\Delta V}{S\Delta t} = \frac{\Delta M}{\rho S\Delta t} = \frac{\rho}{\rho} \sqrt{\frac{\mu}{2N_A E}}$.

Ответ: $u = \frac{\rho}{\rho} \sqrt{\frac{\mu}{2N_A E}} \approx 9 \cdot 10^{-9} \text{ м/с}$.

II.13. Внутренняя энергия гелия (одноатомного идеального газа) равна $U = \frac{3}{2} \nu RT$. Используя уравнение состояния гелия $pV = \nu RT$, внутреннюю энергию можно выразить как $U = \frac{3}{2} pV$. Следовательно, ее изменение $\Delta U = \frac{3}{2} \nu R\Delta T = \frac{3}{2} (p\Delta V + V\Delta p)$. Согласно первому закону термодинамики количество теплоты, сообщенное гелию, $Q = \Delta U + p\Delta V$. С другой стороны, в соответствии с определением теплоемкости, $Q = 2,3\nu R = 2,3(p\Delta V + V\Delta p)$. Объединяя записанные выражения, находим, что $\Delta V = 4V \frac{\Delta p}{p}$. **Ответ:** $\Delta V = 4V \frac{\Delta p}{p} \approx 80 \text{ см}^3$.

II.14. После затухания колебаний поршня сосуд, поршень и газ будут двигаться как одно целое с некоторой скоростью u . Пренебрегая массой газа, по закону сохранения импульса имеем $mv = (m + M)u$, откуда $u = \frac{mv}{m + M}$. Механическая энергия сосуда и поршня уменьшится на величину $\Delta E = \frac{mv^2}{2} - \frac{(m + M)u^2}{2} = \frac{m(M - m)v^2}{2M}$. На такую же величину увеличится внутренняя энергия газа $U = \frac{3}{2} \cdot 2\nu \cdot RT$. Следовательно, $\Delta T = \frac{m(M - m)v^2}{6M\nu R}$. **Ответ:** $\Delta T = \frac{m(M - m)v^2}{6M\nu R}$.

II.15. Поскольку в начальном состоянии пар и вода находятся в равновесии при нормальном давлении, то начальная температура

$t_0 = 100^\circ\text{C}$. Из количественных данных в условии ясно, что весь пар сконденсируется, а весь лед растает. Впрочем, можно предположить, что это так, и проверить в ходе расчета. Тогда выделившееся при конденсации пара и при остывании воды количество теплоты $Q_+ = rm + c(M_0 + m)(t_0 - t)$. Количество теплоты, поглощенное при нагревании и плавлении льда и при нагревании образовавшейся воды, $Q_- = c_l M(0^\circ\text{C} - t_1) + \lambda M + cM(t - 0^\circ\text{C})$. Из уравнения теплового баланса $Q_+ = Q_-$ находим конечную температуру содержимого сосуда

$$t = \frac{M_0 + m}{M_0 + M + m} t_0 + \frac{rm - \lambda M + c_l M t_1}{c(M_0 + M + m)}.$$

Ответ: $t = \frac{M_0 + m}{M_0 + M + m} t_0 + \frac{rm - \lambda M + c_l M t_1}{c(M_0 + M + m)} \approx 62^\circ\text{C}$.

П.16. Давление p в сосуде при температуре $t_2 = 127^\circ\text{C}$ складывается из давления сухого воздуха p_2 и давления p_n водяного пара, т.е.

$p = p_2 + p_n$. Давление сухого воздуха найдем из закона Шарля, а именно $p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1}$, где $T_1 = t_1 + 273 = 250$ К, $T_2 = t_2 + 273 = 400$ К. Предполагая, что весь лед испарился, найдем парциальное давление водяного пара из уравнения Менделеева–Клапейрона. Имеем

$$p_n = \frac{mRT_2}{MV} \approx 66,4 \text{ кПа}, \text{ что меньше давления насыщенного пара}$$

$p_n = 250$ кПа при этой температуре. Следовательно, весь лед действительно испарился. Таким образом, $p = p_1 \frac{T_2}{T_1} + \frac{mRT_2}{MV}$.

Ответ: $p = p_1 \frac{t_2 + 273}{t_1 + 273} + \frac{mR(t_2 + 273)}{MV} \approx 226 \text{ кПа}$.

П.17. Излом на изотерме в точке 2 соответствует началу конденсации водяного пара. Пусть v_n – число молей водяного пара в начальном состоянии, v_v – число молей сухого воздуха. Уравнение состояния паровоздушной смеси на участке 1–2 (до начала конденсации) имеет вид

$pV = (v_n + v_b)RT$, откуда $v_n + v_b = \frac{p_0 V_0}{RT}$, где $p_0 = 0,1$ МПа, $V_0 = 40$ л.

В точках 2 и 3 давление пара равно давлению p_n насыщенного пара при температуре изотермы, а давление воздуха по-прежнему определяется уравнением Менделеева–Клапейрона. Имеем $2p_0 = p_n(T) + \frac{2v_b RT}{V_0}$,

$3p_0 = p_n(T) + \frac{4v_b RT}{V_0}$. Из записанных равенств находим, что

$p_n(T) = p_0$, $v_b = \frac{p_0 V_0}{2RT}$. Таким образом, до начала конденсации

$v_n = v_b = \frac{p_0 V_0}{2RT}$. Кроме того, поскольку давление насыщенного водяно-

го пара равно нормальному атмосферному давлению, то температура изотермы равна $t = 100$ °С. На участке 2–3 объем смеси уменьшается в два раза, поэтому половина водяного пара конденсируется. Следова-

тельно, масса воды в состоянии 3 равна $m_2 = \mu_2 \frac{v_n}{2} = \frac{\mu_2 p_0 V_0}{4RT}$. Масса

сухого воздуха в сосуде $m_1 = \mu_1 v_b = \frac{\mu_1 p_0 V_0}{2RT}$

Ответ: $T = 373$ К, $m_1 = \frac{\mu_1 p_0 V_0}{2RT} \approx 18,7$ г, $m_2 = \frac{\mu_2 p_0 V_0}{4RT} \approx 5,8$ г, где $p_0 = 0,1$ МПа, $V_0 = 40$ л.

П.18. Обозначим через μ_1 и v_1 молярную массу и начальное число молей метана, через μ_2 и v_2 – молярную массу и начальное число молей кислорода, а через m – массу смеси. Тогда справедливо уравнение $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = m$. Начальное давление смеси газов в баллоне равно сум-

ме парциальных давлений метана и кислорода, т.е. $p_1 = \frac{(v_1 + v_2)RT_1}{V}$,

откуда $v_1 + v_2 = \frac{p_1 V}{RT_1}$, где $T_1 = t_1 + 273 = 301$ К. Учитывая, что

$\mu_1 = 16$ г/моль, $\mu_2 = 32$ г/моль, $m = 96$ г, $\frac{p_1 V}{RT_1} \approx 4$ моль, получаем сис-

тему уравнений $16 \frac{\Gamma}{\text{моль}} \nu_1 + 32 \frac{\Gamma}{\text{моль}} \nu_2 = 96 \text{ г}$, $\nu_1 + \nu_2 = 4 \text{ моль}$. Решая эту систему, находим, что $\nu_1 \approx \nu_2 \approx 2 \text{ моль}$. В ходе реакции израсходуется один моль метана и два моля кислорода, а образуется один моль углекислого газа и два моля воды. Итак, в баллоне содержится $\nu = 2$ моля метана и углекислого газа, которые после охлаждения до температуры $T_2 = t_2 + 273 = 373 \text{ К}$ создают давление

$$p'_2 = \frac{\nu RT_2}{V} \approx 124 \text{ кПа.}$$

Если бы вся вода в количестве двух молей находилась в газообразном состоянии, водяные пары создавали бы такое же давление, что невозможно, так как это значение больше давления насыщенного пара $p_n = p_0$ при температуре T_2 . Значит, часть воды будет в жидком состоянии, а давление пара будет равно давлению насыщенного пара, то есть $p_0 \approx 101 \text{ кПа}$. Полное давление в баллоне

$$p_2 = p'_2 + p_0. \quad \text{Ответ: } p_2 = \frac{2R(t_2 + 273)}{V} + p_0 \approx 225 \text{ кПа.}$$

Электродинамика

П.19. Для решения задачи будем использовать закон сохранения энергии. При этом учтем, что потенциальная энергия электростатического отталкивания двух точечных зарядов q , находящихся на расстоянии r друг от друга, определяется выражением $E_3 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}$. Полагая,

что в начальном и конечном состояниях кинетическая энергия кубиков равна нулю, имеем равенство $\Delta E_3 = A_{\text{тр}}$, где $A_{\text{тр}} = -2\mu mgl$ – суммарная работа силы трения при перемещении каждого из кубиков на расстояние k . Таким образом,

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(d+2l)} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d} = -2\mu mgl, \quad \text{откуда}$$

$$l = \frac{kq^2}{2\mu mgd} - \frac{d}{2}. \quad \text{Отметим, что это выражение имеет смысл, если}$$

$$\mu < \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mgd^2}, \quad \text{иначе кубики не придут в движение. Запишем теперь}$$

закон сохранения энергии в произвольный момент времени, когда расстояние между телами равно $d + 2x$. Имеем

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(d+2x)} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d} + 2\frac{mu^2}{2} = -2\mu mgx,$$

откуда $u^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 md} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m(d+2x)} - 2\mu gx$. Максимум этого выражения найдем из условия $\frac{du^2}{dx}|_{x=x_0} = 0$, или $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m(d+2x_0)^2} - \mu g = 0$. Отсюда пройденное каждым из кубиков расстояние x_0 , при котором скорость кубиков максимальна, $x_0 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \mu mg}} - d \right)$. Подставляя это

выражение в формулу для скорости, получаем окончательно, что

$$u_{\max} = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 md} - 2\sqrt{\frac{q^2 \mu g}{4\pi\epsilon_0 m}} + \mu gd}.$$

Ответ: $l = \frac{kq^2}{2\mu mgd} - \frac{d}{2}$; $u_{\max} = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 md} - 2\sqrt{\frac{q^2 \mu g}{4\pi\epsilon_0 m}} + \mu gd}$ при условии,

что $\mu < \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mgd^2}$.

П.20. Так как шар проводящий, потенциалы всех его точек равны. В частности, потенциал точки на поверхности шара, из которой вылетел электрон, равен потенциалу точки O . Потенциал этой точки легко определить из принципа суперпозиции. Имеем

$$\Phi_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{4q}{3R} - \frac{3q}{4R} + \frac{q}{R} \right) = -\frac{13q}{48\pi\epsilon_0 R}.$$

Поскольку потенциал шара отрицателен, при удалении от него отрицательно заряженный электрон будет разгоняться. Пренебрегая излучением и учитывая, что на большом расстоянии от шара потенциал создаваемого им поля равен нулю,

запишем закон сохранения энергии, а именно $\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - e\Phi_O$, где m

– масса электрона, e – модуль его заряда. Отсюда $v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2e}{m} \Phi_0} = \sqrt{\frac{13q\Upsilon}{18\pi\epsilon_0 R}}$. Следовательно, $\frac{v}{v_0} = 2$. **Ответ:** $n = 2$.

II.21. Рассмотрим одну лампу, подключенную к одной батарее. Пусть r внутреннее сопротивление батареи. Напряжение на лампе связано с током через нее равенством $U_0 - Ir = U_0 \left(\frac{I}{I_0}\right)^2$. С другой стороны, выделяемая на лампе мощность как функция тока через нее $P(I) = U(I)I = U_0 I_0 \left(\frac{I}{I_0}\right)^3 = \frac{27}{64} P_0$. Отсюда $I = \frac{3}{4} I_0$. Таким образом, $U_0 - \frac{3}{4} I_0 r = \frac{9}{16} U_0$ и $r = \frac{7}{12} \frac{U_0}{I_0}$. При подключении гирлянды из n ламп к k батареям все лампы работают в номинальном режиме, если $k[U_0 - I_0 r] = n U_0$, или $5k = 12n$. Минимальное целочисленное решение этого уравнения соответствует $n = 5$, при $k = 12$. **Ответ:** $n = 5$; $k = 12$.

II.22. Обозначим токи, текущие в ветвях цепи, как показано на рис. 39. По закону Ома для участка цепи, содержащего ЭДС, имеем

$$IR_x = 2\mathcal{E} - I_1 6r, \quad IR_x = -\mathcal{E} + I_2 6r. \quad \text{Отсюда}$$

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{3r} - \frac{R_x}{6r} I, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{6r} + \frac{R_x}{6r} I.$$

Учитывая, что $I_1 = I_2 + I$, находим, что ток через резистор R_x равен $I = \frac{E}{6r + 2R_x}$. Выделяемая на резисторе R_x

мощность $P = I^2 R_x = \frac{E^2 R_x}{(6r + 2R_x)^2}$ принимает значение $\frac{\mathcal{E}^2}{64r}$ при выполнении условия $64r R_x = (6r + 2R_x)^2$, откуда $R_x = 5r \pm 4r$. Минимальная сила тока соответствует максимальной величине сопротивления $R_x = 9r$. **Ответ:** $R_x = 9r$.

П.23. Электрон будет двигаться в гравитационном и магнитном полях равномерно и прямолинейно только в том случае, когда если Лоренца уравнивает силу тяжести, т.е. $e v B = m g$, где e – модуль заряда электрона, m – масса электрона, v – его скорость. Отсюда $v = \frac{g}{\gamma B}$.

После вылета из области магнитного поля электрон движется под действием только силы тяжести, поэтому время его полета до падения на землю $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Следовательно, по горизонтали он пролетит расстояние

$$s = v\tau = \frac{\sqrt{2gh}}{\gamma B}. \quad \text{Ответ: } s = \frac{\sqrt{2gh}}{\gamma B}.$$

П.24. В плоскости, перпендикулярной полям, частица движется под действием силы Лоренца $F_L = q_\alpha v_0 B \sin \beta$ по окружности радиуса

$$R = \frac{m_\alpha v_0^2 \sin^2 \beta}{F_L} = \frac{m_\alpha v_0 \sin \beta}{q_\alpha B}.$$

При этом вдоль полей частица движется равноускоренно под действием электрического поля с ускорением $a = \frac{q_\alpha E}{m_\alpha}$. Закон движения частицы по оси Ox , направленной вдоль

поля \vec{E} , определяется выражением $x(t) = x_0 + v_0 \cos \beta \cdot t + \frac{at^2}{2}$. Поэтому траектория частицы – винтовая линия с увеличивающимся шагом. Шаг

n -ого витка $s_n = x(nT) - x((n-1)T) = \frac{2\pi m_\alpha}{q_\alpha B} \left[v_0 \cos \beta + \frac{\pi E}{B} (2n-1) \right]$. Окон-

чательно, $\frac{s_n}{R} = 2\pi \cdot \operatorname{ctg} \beta + \frac{2\pi^2 (2n-1) E}{v_0 B \sin \beta}$.

Ответ: $k = 2\pi \cdot \operatorname{ctg} \beta + \frac{2\pi^2 (2n-1) E}{v_0 B \sin \beta} \approx 10,50 + 0,76 \cdot n$.

П.25. Магнитный поток через площадь $S = x^2 \sin \frac{\alpha}{2}$, ограниченную стержнем и согнутым проводником, $\Phi = BS$. При движении

стержня под действием силы F магнитный поток будет возрастать и по закону электромагнитной индукции в контуре возникнет ЭДС индукции, модуль которой $|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi}{dt} = B \frac{dS}{dt} = 2Bx \sin \frac{\alpha}{2} \frac{dx}{dt} = 2Bxv \sin \frac{\alpha}{2}$. По закону Ома для полной цепи в контуре возникнет электрический ток $I = \frac{|\mathcal{E}|}{R}$, где $R = 2\rho x \sin \frac{\alpha}{2}$ – сопротивление стержня между точками соприкосновения с проводником. Сила Ампера, действующая на проводник, $F_A = IB2x \sin \frac{\alpha}{2}$. Уравнение движения стержня имеет вид $ma = F - F_A$, или $ma = kx - \frac{2B^2 x v}{\rho} \sin \frac{\alpha}{2}$. Скорость стержня достигнет максимального значения, когда его ускорение станет равным нулю. Из уравнения $kx - \frac{2B^2 x v_{\max}}{\rho} \sin \frac{\alpha}{2} = 0$ находим $v_{\max} = \frac{k\rho}{2B^2 \sin \frac{\alpha}{2}}$.

Ответ: $v_{\max} = \frac{k\rho}{2B^2 \sin \frac{\alpha}{2}}$.

Оптика

П.26. Для угла β преломления луча, падающего на торец цилиндра из воздуха под углом, близким к $\alpha = 90^\circ$, выполняется равенство $\frac{1}{\sin \beta} = n$. Для того чтобы преломленный луч не вышел в воду через боковую поверхность цилиндра, на этой поверхности для угла падения δ должно выполняться условие полного внутреннего отражения, а именно $\sin \delta = \frac{n_B}{n}$. Поскольку угол между радиусом и образующей цилиндра прямой, то $\delta = \frac{\pi}{2} - \beta$. Значит, $\sin \delta = \cos \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$, и поэтому справедливо равенство $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n_B^2}{n^2}$. Отсюда $n = \sqrt{n_B^2 + 1}$.

Ответ: $n = \sqrt{n_B^2 + 1} \approx 1,66$.

П.27. В ясный день Солнце можно считать удаленным источником света, лучи от которого практически параллельны. Поэтому тень на горизонтальном дне пруда повторяет форму самого плота. При сплошной облачности на поверхность воды падает рассеянное освещение, и стягивание тени от плота в точку означает, что световые лучи, проходящие под плот с максимальным углом наклона к вертикали, попадают в точку, находящиеся под центром плота. Таким образом, угол $\alpha = \arctg\left(\frac{D}{2H}\right)$ должен быть критическим углом полного внутреннего

отражения для границы «вода–воздух», т.е. $\sin \alpha = \frac{1}{n}$. Используя формулу $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{D}{\sqrt{D^2 + 4H^2}}$, находим, что $H = \frac{D}{2} \sqrt{n^2 - 1}$.

Ответ: $H = \frac{D}{2} \sqrt{n^2 - 1} \approx 0,88$ м.

П.28. Шарик движется по окружности под действием сил, изображенных на рис. 40, где $m\vec{g}$ – сила тяжести, \vec{T} – сила натяжения нити. По второму закону Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси имеем: $m\omega^2 r = T \sin \alpha$, $0 = T \cos \alpha - mg$, где α – угол, который образует нить с вертикалью, r – радиус окружности. Из этих уравнений находим, что $\omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{r}} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt[4]{l^2 - r^2}}$. Используя формулу тонкой линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$, найдем расстояние от линзы до плоскости изображения $f = \frac{dF}{d - F}$. Из подобия треугольников (см. рис.) следует, что $f = \frac{dR}{r}$. Объединяя записанные выражения, на-

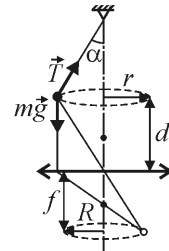


Рис. 40

Рис. 40

ходим, что $r = \frac{(d-F)R}{F}$. Окончательно получаем, что

$$\omega = \frac{\sqrt{gF}}{\sqrt[4]{l^2 F^2 - R^2 (d-F)^2}}. \quad \text{Ответ: } \omega = \frac{\sqrt{gF}}{\sqrt[4]{l^2 F^2 - R^2 (d-F)^2}}.$$

II.29. Поскольку линза формирует на экране действительное изображение булавки, то она является собирающей. Обозначим через a первоначальное расстояние от булавки до линзы, а через b – соответствующее расстояние от линзы до изображения булавки. Легко установить, что выражение для увеличения изображения можно записать в виде $\Gamma = \frac{b}{a}$. Используя формулу тонкой линзы, а именно $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$,

находим, что $b = \frac{aF}{a-F}$ и $\Gamma = \frac{F}{a-F}$. После отодвигания линзы от булавки на расстояние s увеличение изображения станет равным

$\Gamma' = \frac{F}{a+s-F}$. Исключая из последних двух соотношений a , находим,

что $F = \frac{\Gamma\Gamma's}{\Gamma-\Gamma'}$. Следовательно, оптическая сила линзы $D = \frac{1}{F} = \frac{\Gamma-\Gamma'}{\Gamma\Gamma's}$.

Ответ: $D = \frac{\Gamma-\Gamma'}{\Gamma\Gamma's} = 2,5$ дптр.

II.30. Поскольку линза формирует на экране действительное изображение предмета, то она является собирающей. Обозначим через a расстояние от предмета до линзы, а через b – расстояние от линзы до изображения предмета. Легко установить, что выражение для увеличения изображения можно записать в виде $\Gamma = \frac{b}{a}$. Используя формулу

тонкой линзы, а именно $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$, находим, что $a = \frac{F(\Gamma+1)}{\Gamma}$,

$b = F(\Gamma+1)$. Следовательно, расстояние между предметом и экраном

$L = a+b = F \frac{(\Gamma+1)^2}{\Gamma}$. Поскольку это расстояние в первом и во втором

случаях одинаково, то справедливо равенство $F_1 \frac{(\Gamma_1 + 1)^2}{\Gamma_1} = F_2 \frac{(\Gamma_2 + 1)^2}{\Gamma_2}$.

Отсюда $F_2 = F_1 \frac{\Gamma_2(\Gamma_1 + 1)^2}{\Gamma_1(\Gamma_2 + 1)^2}$. **Ответ:** $F_2 = F_1 \frac{\Gamma_2(\Gamma_1 + 1)^2}{\Gamma_1(\Gamma_2 + 1)^2} = 25$ см.

П.31. По формуле тонкой линзы для первой линзы имеем $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_1}$. Отсюда расстояние от первой линзы до изображения источника $f_1 = 3F$. Аналогично для второй линзы $\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_2}$, откуда расстояние от источника до линзы $d_2 = -F$. Таким образом, изображение источника, создаваемое первой линзой, находится на расстоянии $f_1 = 3F$ за ней. При этом оно является источником для второй линзы и находится за второй линзой на расстоянии F от нее. Следовательно, расстояние между линзами $L = 2F$. **Ответ:** $L = 2F$.

П.32. Обозначим через d расстояние от предмета до линзы, через f – расстояние от линзы до изображения предмета, а через D – оптическую силу линзы. Поскольку рассеивающая линза дает мнимое изображение, формула тонкой линзы в первом случае имеет вид $\frac{1}{d} - \frac{1}{f_1} = D_1$. Выражение для увеличения изображения запишем в виде $\Gamma_1 = \frac{f_1}{d}$. Исключая из записанных выражений f_1 , находим, что оптическая сила рассеивающей линзы $D_1 = \frac{\Gamma_1 - 1}{\Gamma_1 d}$. Так как оптические силы вплотную прижатых друг к другу линз складываются, а во втором случае изображение по условию вновь является мнимым, имеем равенство $D_1 + D_2 = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2 d}$. Из записных выражений находим, что оптическая сила собирающей линзы $D_2 = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\Gamma_1 \Gamma_2 d}$. Увеличение действительного изображения, давае-

мое собирающей линзой, равно $\Gamma = \frac{1}{D_2 d - 1}$. Подставляя в эту формулу найденное выше выражение для D_2 , находим окончательно $\Gamma = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_2 - \Gamma_1 - \Gamma_1 \Gamma_2}$. **Ответ:** $\Gamma = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_2 - \Gamma_1 - \Gamma_1 \Gamma_2} = 1$.

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ – 2013/2014»

I. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Задание для 7-х – 9-х классов

I.1. Коэффициент полезного действия механизма по определению равен $\eta = \frac{A_{\text{п}}}{A_3} \cdot 100\%$, где $A_{\text{п}}$ – полезная работа по перемещению ящика, A_3 – полная (затраченная) работа. Пусть вертикальное перемещение ящика составило некоторую величину h . Тогда $A_{\text{п}} = mgh$, а $A_3 = Fs = F \frac{h}{\sin \alpha}$. Отсюда $\eta = \frac{mg}{F} \sin \alpha \cdot 100\%$.
Ответ: $\eta = \frac{mg}{F} \sin \alpha \cdot 100\% = 90\%$.

I.2. Условие равновесия тела имеет вид $N = mg + F_{\downarrow}$, где F_{\downarrow} – суммарная сила давления со стороны жидкости на верхнюю полусферическую поверхность тела. Если бы жидкость подтекала под нижнюю поверхность тела, то на него бы действовала выталкивающая сила $F_{\text{выт}} = \rho g V$. Эта сила равна разности сил давления со стороны жидкости на нижнюю (плоскую) и верхнюю (полусферическую) поверхности тела: $F_{\text{выт}} = F_{\uparrow} - F_{\downarrow}$. Отсюда находим, что $F_{\downarrow} = F_{\uparrow} - F_{\text{выт}} = \rho gh \cdot \pi R^2 - \rho g \frac{2}{3} \pi R^3$. **Ответ:** $N = mg + \rho g \cdot \pi R^2 \left(h - \frac{2}{3} R \right) \approx 93 \text{ Н}$.

I.3. Обозначим через I силу тока в цепи. Тогда полная мощность, выделяющаяся в цепи, равна UI , а мощность, выделяющаяся на резисторе

r , равна $I^2 r$. Если через P_x обозначить мощность, выделяющаяся на резисторе с неизвестным сопротивлением, то можно записать равенство $UI = I^2 r + P_x$, откуда $P_x = UI - I^2 r$. Поскольку P_x обращается в нуль при $I_1 = 0$ и $I_2 = \frac{U}{r}$, то максимум квадратичной функции $P_x(I)$ достигается при $I = I_0 = \frac{I_1 + I_2}{2} = \frac{U}{2r}$ и равен $P_{x \max} = \frac{U^2}{4r}$. Следовательно, мощность, выделяющаяся при этом на резисторе r , равна $P = I_0^2 r = \frac{U^2}{4r}$.

Ответ: $P = \frac{U^2}{4r} = 25$ Вт.

I.4. Ход лучей, испущенных двумя точками, находящимися на противоположных концах нити, изображен на рис. 41. Видно, что диаметр светового пятна на экране определяется лучами, выходящими из ближнего к линзе конца нити и проходящими через край линзы. Из подобия треугольников (см. рис.) имеем: $\frac{x}{h} = \frac{L}{F}$, $\frac{h}{l} = \frac{D/2}{F-l}$.

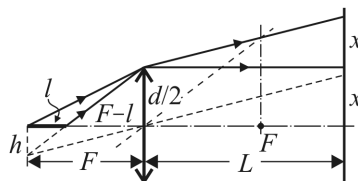


Рис. 41

Исключая из этих выражений h , находим длину отрезка x , а именно $x = \frac{dLl}{2F(F-l)}$. Учитывая, что $D = d + 2x$, получаем, что

$$D = d \left(1 + \frac{Ll}{F(F-l)} \right). \quad \text{Ответ: } D = d \left(1 + \frac{Ll}{F(F-l)} \right) = 12 \text{ мм.}$$

I.5. В момент начала движения зайца волк находился в точке A_1 , расстояние A_1B равно $L_1 = L - v_1 \cdot t_0$. Перейдем в систему координат, движущуюся вместе с зайцем. Заяц в этой системе неподвижен, а у волка появляется дополнительная скорость $-v_2$, направленная против движения новой системы отсчета. Из рис. 42 видно, что модуль скорости волка

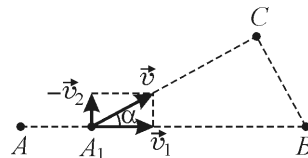


Рис. 42

относительно зайца $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, а угол α между векторами \vec{v} и \vec{v}_1 удовлетворяет соотношению $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2}$. Расстояние между волком и зайцем минимально, когда волк находится в точке C , причем $BC \perp A_1C$. После начала движения волк окажется в точке C через время

$$t_1 = t_0 + \frac{L_1 \cos \alpha}{v} = t_0 + \frac{L_1 \cos^2 \alpha}{v_1} = t_0 + \frac{(L/v_1 - t_0)}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = t_0 + \frac{(L/v_1 - t_0)}{1 + (v_2/v_1)^2}.$$

Ответ: $t_1 = t_0 + \frac{(L/v_1 - t_0)}{1 + (v_2/v_1)^2} = 532$ с.

I.6. По второму закону Ньютона уравнение движения шарика имеет вид $m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{u}$, где m – масса шарика, \vec{a} – его ускорение, k – коэффициент сопротивления. В проекции на координатную ось OY , направленную вертикально вверх и имеющую начало в точке вылета шарика из ствола пистолета, имеем $m \frac{\Delta u}{\Delta t} = -mg - k \frac{\Delta y}{\Delta t}$, или $m \cdot \Delta u = -mg \cdot \Delta t - k \cdot \Delta y$. Поскольку m , g и k – постоянные величины, отсюда следует равенство $m[u(\tau) - u(0)] = -mg\tau - k[y(\tau) - y(0)]$. Подставляя в это равенство $u(0) = u_1$, $u(\tau) = -u_2$, $y(0) = 0$, $y(\tau) = 0$, получаем, что $m(u_1 + u_2) = mg\tau$. Отсюда $u_1 = g\tau - u_2$.

Ответ: $u_1 = g\tau - u_2 = 50$ м/с.

Задание для 10-х – 11-х классов

Первый тур

I.7. Пренебрегая импульсом силы трения во время броска камня, по закону сохранения импульса имеем $mu = Mv$, где v модуль скорости мальчика после броска. Согласно закону изменения механической энергии мальчика при его скольжении по льду $\frac{Mv^2}{2} = |A_{\text{тр}}|$, где

$|A_{\text{тр}}| = \mu MgL$ – модуль работы силы трения. Отсюда $\mu = \frac{m^2 u^2}{2M^2 gL}$.

Ответ: $\mu = \frac{m^2 u^2}{2M^2 gL} = 0,1.$

I.8. Кубик находится в равновесии под действием сил, модули и направления которых изображены на рис. 43, где mg – модуль силы тяжести, T – модуль силы натяжения нити, N – модуль нормальной составляющей силы реакции плоскости, $F_{\text{тр}}$ – модуль силы трения покоя. Запишем уравнение моментов относительно оси, проходящей через точки касания кубиком плоскости,

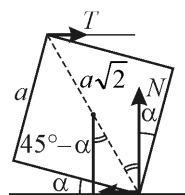


Рис. 43

$$T \cdot a\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = mg \cdot a \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right),$$

где a – дли-

на ребра кубика. Отсюда $T = \frac{1}{2} mg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$. Силу натяжения нити T

должна уравновешивать сила трения $F_{\text{тр}}$ кубика о плоскость. Нормальная составляющая N силы реакции плоскости должна уравновешивать силу тяжести, действующую на кубик. Поэтому модуль искомой силы

$$\text{равен } F = \sqrt{F_{\text{тр}}^2 + (mg)^2} = mg \sqrt{\frac{1}{4} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + 1}.$$

Ответ: $F = mg \sqrt{\frac{1}{4} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + 1} = 0,52 \text{ Н.}$

I.9. Обозначим начальную абсолютную температуру газа через T_1 , температуру газа после изохорного нагревания через T_2 , а конечную температуру через T_3 . Тогда согласно уравнению Менделеева–Клапейрона $p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$, $p_2 V_1 = \frac{m}{\mu} RT_2$, $p_2 V_3 = \frac{m}{\mu} RT_3$. Поскольку

$$A = p_2(V_1 - V_3), \text{ то } T_3 = \frac{AV_3\mu}{(V_1 - V_3)mR} \text{ и искомая разность температур рав-}$$

$$\text{на } \Delta T = T_3 - T_1 = \left[\frac{AV_3}{V_1 - V_3} - p_1 V_1 \right] \cdot \frac{\mu}{mR}.$$

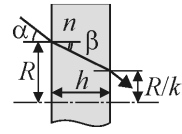
Ответ: $\Delta T = \left[\frac{AV_3}{V_1 - V_3} - p_1 V_1 \right] \cdot \frac{\mu}{mR} \approx 60 \text{ К.}$

I.10. Емкость двух последовательно соединенных одинаковых конденсаторов равна $C_H = \frac{C}{2}$, а после заполнения одного из них диэлектриком станет равной $C_K = \frac{\epsilon C}{\epsilon + 1}$. Поэтому установившийся заряд на каждом из конденсаторов в начальном и конечном состояниях будет $q_H = C_H \mathcal{E} = \frac{C\mathcal{E}}{2}$, $q_K = C_K \mathcal{E} = \frac{\epsilon C\mathcal{E}}{\epsilon + 1}$, а энергия конденсаторов в начальном и конечном состояниях $W_H = \frac{q_H^2}{2C_H}$, $W_K = \frac{q_K^2}{2C_K}$. Заряд, протекший через батарейку после заполнения одного из конденсаторов диэлектриком, равен $\Delta q = q_K - q_H$. Максимальная работа сторонних сил после заполнения конденсатора диэлектриком $A = \mathcal{E}\Delta q$, а изменение электростатической энергии конденсаторов $\Delta W = W_K - W_H$. Согласно закону сохранения энергии искомое количество теплоты равно $Q = A - \Delta W$.

Ответ: $Q = \frac{C\mathcal{E}^2}{4} \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \approx 0,83 \text{ нДж}$.

I.11. Так как требуется найти минимальную толщину пластинки, то ход крайнего луча пучка должен быть таким, как показано на рис. 44.

По закону преломления $\sin \alpha = n \sin \beta$. Из рисунка видно, что $R\left(1 - \frac{1}{k}\right) = h \operatorname{tg} \beta$. Учитывая равенство



$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}$, находим, что

$h = \frac{(k-1)R\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{k \sin \alpha}$. **Ответ:** $h = \frac{(k-1)R\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{k \sin \alpha} \approx 5,65 \text{ см}$.

Второй тур

I.12. Поскольку плот движется по воде без трения, центр масс системы «человек – плот» будет оставаться неподвижным. Выберем начало отсчета в точке, совпадающей с центром масс системы, а координатную ось OX направим вдоль диагонали плота. Тогда координата

центра масс системы $x_c = \frac{-Mx + m(l-x)}{M+m} = 0$. Здесь $l = \sqrt{S/2}$ – перемещение человека относительно плота, равное половине диагонали плота. Отсюда находим, что $x = \frac{ml}{M+m} = \frac{m}{M+m} \sqrt{\frac{S}{2}}$.

Ответ: $x = \frac{m}{M+m} \sqrt{\frac{S}{2}} \approx 33$ см.

I.13. Доска и ящик движутся под действием сил, модули и направления которых изображены на рис. 45. Уравнения движения доски и ящика в предположении, что ящик не перемещается по доске, имеют вид:

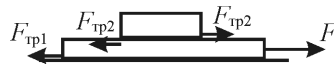


Рис. 45

$ma = F - F_{\text{тр1}} - F_{\text{тр2}}$, $Ma = F_{\text{тр2}}$. Отсюда $F = (M+m)a + F_{\text{тр1}}$. Сила трения скольжения между доской и полом $F_{\text{тр1}} = \mu_1(M+m)g$, а максимальное значение силы трения покоя между ящиком и доской $F_{\text{тр2}} = \mu_2 Mg$. Следовательно, максимальное значение ускорения ящика $a = \mu_2 g$. Из записанных выражений находим, что $F = (\mu_1 + \mu_2)(M+m)g$. **Ответ:** $F = (\mu_1 + \mu_2)(M+m)g = 480$ Н.

I.14. Уравнение реакции горения водорода в кислороде имеет вид $2\text{H}_2 + \text{O}_2 = 2\text{H}_2\text{O}$. Отсюда следует, что количество молей сгоревшего водорода равно количеству молей образовавшегося водяного пара и вдвое превышает количество молей требующегося для горения кислорода. Поскольку $0,23\nu_2 > \frac{\nu_1}{2}$, имеющегося в сосуде воздуха с избытком хватит для полного сгорания водорода. Следовательно, в воздухе образуется ν_1 молей водяного пара. Используя уравнение Менделеева–Клапейрона, находим парциальное давление водяного пара: $p = \frac{\nu_1 RT}{V}$, где $T = t + 273 = 293$ К. Относительная влажность воздуха равна $\varphi = \frac{p}{p_{\text{н}}} \cdot 100\% = \frac{\nu_1 RT}{p_{\text{н}} V} \cdot 100\%$. **Ответ:** $\varphi = \frac{\nu_1 RT}{p_{\text{н}} V} \cdot 100\% \approx 52\%$.

I.15. Относительно неподвижной системы отсчета скорость шарика $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$. Сила Лоренца \vec{F}_L , действующая на шарик, перпендикулярна \vec{v} и по модулю равна $F_L = qvB = qB\sqrt{v_0^2 + u^2}$. Разложим ее на две составляющие: параллельную трубке \vec{F}_\parallel и перпендикулярную трубке \vec{F}_\perp . Из рис. 46 видно, что $F_\parallel = F_L \sin \alpha$,

$F_\perp = F_L \cos \alpha$. Поскольку $\sin \alpha = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + u^2}}$, $\cos \alpha = \frac{u}{\sqrt{v_0^2 + u^2}}$, то $F_\parallel = qv_0B$, $F_\perp = quB$. Скорость движения шарика относительно трубки определяется из условия $F_\parallel = \alpha u$. Искомая мощность $N = F_\perp v_0$. Отсюда $N = \frac{(qv_0B)^2}{\alpha}$. **Ответ:** $N = \frac{(qv_0B)^2}{\alpha} \approx 2,5$ пВт.

I.16. Пусть α – угол падения крайнего луча на пластинку, β – соответствующий угол преломления r_1 – радиус пучка на входе в плоскопараллельную пластинку, x – разность между радиусами пучка на выходе и на входе в пластинку (рис. 47). Тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{f} = \frac{r_1}{l-f}$, $R = r_1 + x$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{x}{h}$, а по закону

Снеллиуса $\sin \alpha = n \sin \beta$. Отсюда $R = \frac{(l-f)r}{f} + \frac{h}{\sqrt{(1+f^2/r^2)n^2 - 1}}$.

Ответ: $R = \frac{(l-f)r}{f} + \frac{h}{\sqrt{(1+f^2/r^2)n^2 - 1}} \approx 8,3$ мм.

Третий тур

I.17. Пусть m_1 и m_2 – массы тел. По законам сохранения импульса и механической энергии имеем: $m_1 v_1 = m_2 v_2$, $E_{\text{п}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$.

Учитывая, что $m_1 + m_2 = M$, находим, что $E_{\text{п}} = \frac{1}{2} M v_1 v_2$.

Ответ: $E_{\text{п}} = \frac{1}{2} M v_1 v_2 = 24$ Дж.

I.18. Груз движется вместе с тележкой равноускоренно под действием силы упругости. По второму закону Ньютона $ma = kx_0$. Здесь m – масса груза, k – жесткость пружины, x_0 – ее удлинение. Амплитуду возникших колебаний можно найти с помощью закона сохранения энергии:

$\frac{kx_0^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$. Учитывая, что $\frac{m}{k} = \frac{T^2}{4\pi^2}$, получаем окончатель-

ную формулу для вычисления амплитуды: $A = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{a^2 T^2}{4\pi^2} + v^2}$.

Ответ: $A = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{a^2 T^2}{4\pi^2} + v^2} \approx 20,3$ см.

I.19. Поскольку теплоемкости кубиков $C_1 = c\rho a^3$ и $C_2 = c\rho b^3$, где c – удельная теплоемкость стали, а ρ – ее плотность, то $C_2 = C_1 \cdot (b/a)^3$. Уравнения теплового баланса имеют вид:

$$C_0 \cdot (t - t_1) = C_1 \cdot (t_1 - t_0), \quad (C_0 + C_1) \cdot (t_3 - t_1) = C_2 \cdot (t_2 - t_3).$$

Перепишем второе уравнение следующим образом: $C_0 \cdot (t_3 - t_1) = C_1 \cdot [(b/a)^3 \cdot (t_2 - t_3) - (t_3 - t_1)]$ и поделим его почленно на первое уравнение. В результате получим равенство

$$\frac{t_3 - t_1}{t - t_1} = \frac{(b/a)^3 \cdot (t_2 - t_3) - (t_3 - t_1)}{t_1 - t_0}. \quad \text{Отсюда } t_2 = t_3 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \frac{(t_3 - t_1) \cdot (t - t_0)}{t - t_1}.$$

Ответ: $t_2 = t_3 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \frac{(t_3 - t_1) \cdot (t - t_0)}{t - t_1} \approx 41,9$ °С.

I.20. При параллельном соединении двух одинаковых батарей с ЭДС \mathcal{E} и внутренними сопротивлениями r внутреннее сопротивление образовавшегося источника становится равным $r/2$, а ЭДС источника остается равной ЭДС одной батареи. Поэтому исходные уравнения та-

ковы: $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r}$, $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r}$, $I_3 = \frac{\mathcal{E}}{R_3 + r/2}$. Решая эту систему, нахо-

дим $I_3 = \frac{2I_1I_2(R_1 - R_2)}{2R_3(I_2 - I_1) + I_1R_1 - I_2R_2}$.

Ответ: $I_3 = \frac{2I_1I_2(R_1 - R_2)}{2R_3(I_2 - I_1) + I_1R_1 - I_2R_2} \approx 0,67 \text{ А}$.

I.21. Ход лучей изображен на рис. 48. При исходном положении линз (верхняя часть рисунка) для рассеивающей линзы имеем: $-\frac{1}{F_1 - l} + \frac{1}{b_1} = -\frac{1}{F_2}$. Отсюда $b_1 = \frac{F_2(F_1 - l)}{F_2 - F_1 + l}$, где b_1 – расстояние от правой линзы до фокуса системы линз (точки 1) в первом случае. После перестановки линз (нижняя часть рисунка) для собирающей линзы можно записать: $\frac{1}{F_2 + l} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{F_1}$. Отсюда $b_2 = \frac{F_1(F_2 + l)}{F_2 - F_1 + l}$, где b_2 – расстояние от правой линзы до фокуса системы линз (точки 2) во втором случае. Следовательно, $\Delta x = b_2 - b_1 = \frac{l(F_1 + F_2)}{F_2 - F_1 + l}$. **Ответ:** $\Delta x = \frac{l(F_1 + F_2)}{F_2 - F_1 + l} \approx 16,7 \text{ см}$.

Рис. 48

II. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Задание для 7-х – 9-х классов

II.1. Модуль искомой скорости будет наибольшим, если тяжёлый осколок полетит в направлении скорости снаряда перед его взрывом, а два других – в противоположную сторону. Обозначив через u модуль скорости каждого из легких осколков, имеем: по закону сохранения импульса $4mv = 2mv_3 - 2mu$; по закону сохранения механической энергии

$$\frac{4mv^2}{2} + \Delta E_k = \frac{m}{2}(2v_3^2 + 2u^2).$$

Исключая из этих уравнений u , приходим к квадратному уравнению относительно v_3 , а именно

$v_3^2 - 2v_3v + v^2 - \frac{\Delta E_k}{2m} = 0$. Отсюда $v_3 = v \pm \sqrt{\frac{\Delta E_k}{2m}}$. Учитывая, что $\sqrt{\frac{\Delta E_k}{2m}} = 300$ м/с, что превышает заданное в условии значение $v = 50$ м/с, выбираем положительный корень $v_3 = v + \sqrt{\frac{\Delta E_k}{2m}}$.

Ответ: $v_3 = v + \sqrt{\frac{\Delta E_k}{2m}} = 350$ м/с.

П.2. До охлаждения масса водяных паров в банке была равна $m_k = \frac{\varphi}{100\%} \rho_k V$. После охлаждения масса насыщенного пара в банке станет равной $m_x = \rho_x V$. Поэтому масса образовавшегося в банке льда равна $m = m_k - m_x = \left(\frac{\varphi}{100\%} \rho_k - \rho_x \right) V \approx 24,8 \cdot 10^{-3}$ г.

Ответ: $m = \left(\frac{\varphi}{100\%} \rho_k - \rho_x \right) V \approx 25$ мг.

П.3. Эквивалентная схема цепи изображена на рис. 49. Видно, что резисторы R_1 и R_2 , представляющие собой левый и правый участки реостата, соединены параллельно. При этом $R_1 = \frac{r \cdot x}{L} = 4$ Ом, $R_2 = \frac{r(L-x)}{L} = 12$ Ом. По формуле для сопротивления двух параллельно соединенных резисторов получаем $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4 \cdot 12}{4 + 12} = 3$ Ом. **Ответ:** $R = \frac{x(L-x)}{L^2} r = 3$ Ом.

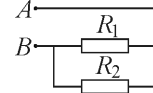


Рис. 49

П.4. Ход луча, падающего на зеркало и отраженного от него, изображен на рис. 50. Видно, что угол γ между падающим лучом и нормалью к зеркалу равен $\gamma = \frac{1}{2}(90^\circ + \alpha) = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$. По закону отражения угол δ между нормалью к зеркалу и отраженным лучом равен углу γ . Согласно теореме о равенстве углов с взаимно

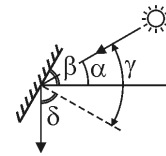


Рис. 50

перпендикулярными сторонами, $\beta = \delta$. Таким образом, $\beta = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $\beta = 45^\circ + \frac{\alpha}{2} = 61^\circ$.

Задание для 10-х – 11-х классов

П.5. Работа силы трения на этапе торможения боба равна $A_{\text{тр}} = -\frac{1}{2}\alpha s_0^2 mg$, где s_0 – тормозной путь боба. Поэтому, по закону изменения и превращения механической энергии,

$$\left(\frac{mv_0^2}{2} + mgh\right) \cdot \left(1 - \frac{\eta}{100\%}\right) - \frac{1}{2}\alpha s_0^2 mg = 0,$$

откуда $s_0 = \sqrt{\frac{(v_0^2 + 2gh)(1 - \eta/100\%)}{\alpha g}}$. По второму закону Ньютона на

участке торможения $ma_x = -\mu mg$, или $\ddot{x} + \alpha g \cdot x = 0$. Т.к. это уравнение совпадает с уравнением гармонического осциллятора, то до момента остановки боб движется по закону: $x(t) = s_0 \sin \omega_0 t$, причем $\omega_0 = \sqrt{\alpha g}$. Скорость боба при этом меняется по закону $u = u_0 \cos \omega_0 t$, где

$u_0 = \omega_0 s_0 = \sqrt{(v_0^2 + 2gh)(1 - \eta/100\%)}$ – скорость боба в момент пересечения линии финиша. По условию задачи в момент времени τ выполняется равенство $x(\tau) = \frac{s_0}{2}$. Следовательно, $\omega_0 \tau = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Скорость

боба в момент времени τ равна $u = u_0 \cos \omega_0 \tau = \frac{u_0 \sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $u = \frac{1}{2} \sqrt{3(v_0^2 + 2gh)(1 - \eta/100\%)} \approx 40,1$ м/с.

П.6. Пусть m – первоначальная масса паров воды, μ – её молярная масса; V – первоначальный, а V_k – конечный объёмы воздуха; $p_n = 1$ атм – давление насыщенных паров воды при температуре $t = 100^\circ\text{C}$; $p_{в0}$ – первоначальное, а $p_{вк}$ – конечное давления сухого воздуха. По закону

Дальтона $p_{в0} = p_0 - \varphi \cdot p_H$, $p_K = p_{вк} + p_H$. Так как $m = \frac{\mu \varphi p_H V}{RT}$ и $(1-n) \cdot m = \frac{\mu p_H V_K}{RT}$, то $V_K = \varphi(1-n)V$ и $p_{вк} = \frac{p_{в0}}{\varphi(1-n)}$.

Ответ: $p_K = \frac{p_0 - n \varphi p_H}{\varphi(1-n)} = 5$ атм.

П.7. На шарик, находящийся в воздухе, действуют сила тяжести $m\vec{g}$, кулоновская сила \vec{F}_K и сила натяжения нити \vec{T} (рис. 51). Из условия равновесия шарика следует, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_K}{mg}$. В жидкости к перечисленным силам добавится

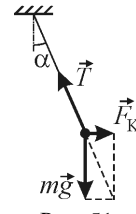


Рис. 51

архимедова сила \vec{F}_A , направленная вверх, а кулоновская сила уменьшится в ε раз, т.е. $F'_K = \frac{F_K}{\varepsilon}$. Поскольку угол отклонения нити по условию не изменяется, условие равновесия шарика приводит к равенству $\operatorname{tg} \alpha = \frac{F'_K}{mg - F_A}$. Обозначим через V объем шарика. Тогда $m = \rho V$, $F_A = \rho_0 V g$. Объединяя записанные выражения, получаем равенство $\rho = \varepsilon(\rho - \rho_0)$, из которого следует, что $\rho = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \rho_0$.

Ответ: $\rho = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \rho_0 = 1,2$ г/см³.

П.8. Обозначим через a и b расстояния от предмета до линзы и от линзы до экрана. По формуле тонкой линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$, а по условию $b = L - a$. Из записанных выражений получаем квадратное уравнение относительно a , а именно $a^2 - La + LF = 0$. Корни этого уравнения $a_{1,2} = \frac{L}{2} (1 \pm \sqrt{1 - 4F/L})$. Поэтому $b_{1,2} = \frac{L}{2} (1 \mp \sqrt{1 - 4F/L})$. Увеличение, даваемое линзой, $\Gamma = \frac{b}{a}$. Это выражение максимально, если

$$b = b_{\max} = b_2, \quad a = a_{\min} = a_2. \text{ Следовательно, } \Gamma_{\max} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4F/L}}{1 - \sqrt{1 - 4F/L}}.$$

Ответ: $\Gamma_{\max} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4F/L}}{1 - \sqrt{1 - 4F/L}} = 4.$

ПРОФИЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН 2014

I. Механика

I.1. Поскольку точка максимального подъема тела находится на равных расстояниях от точек бросания и падения тела, для выполнения условия задачи дальность полета тела l должна вдвое превышать высоту максимального подъема тела h , т.е. $l = 2h$ (рис. 52). Поскольку дальность полета тела, брошенного со скоростью v_0 под углом α к горизонту,

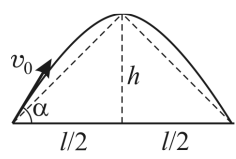


Рис. 52

ту, $l = 2 \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha$, а максимальная высота подъема тела $h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$, то $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Отсюда $\alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63^\circ$.

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63^\circ$.

I.2. В момент $t = 0$ первого удара шарика о пол его скорость \vec{v}_0 направлена так, как показано на рис. 53, т.е. под углом $\alpha = 30^\circ$ к вертикали (т.к. $\sin \alpha = 1/2$), а её модуль равен

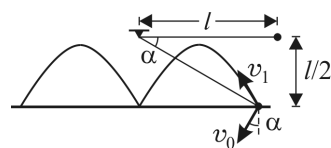


Рис. 53

$v_0 = \sqrt{gl}$. После первого абсолютно упругого удара о пол скорость шарика станет равной \vec{v}_1 . При этом модуль скорости не изменится, её горизонтальная составляющая останется неизменной, а вертикальная – изменит своё направление на противоположное. В результате шарик начнёт двигаться по параболе как тело, брошенное под углом α к вертикали со скоростью \vec{v}_1 . Второй удар шарика о пол произойдёт в момент времени

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \cos \alpha = \sqrt{\frac{3l}{g}} \quad \text{на расстоянии} \quad s = \sqrt{gl} \cdot t_1 \cdot \sin \alpha = \frac{l\sqrt{3}}{2} \quad \text{от точки}$$

первого удара, т.е. в точке, расположенной прямо под точкой подвеса. Третий удар произойдёт в точке, находящейся на расстоянии $2s$ от точки первого удара. Поэтому искомое расстояние $x = 2s = l\sqrt{3}$.

Ответ: $x = 2s = l\sqrt{3} \approx 6,9$ м.

И.3. Пусть u – модуль скорости движения бруска по горизонтальному участку после соскальзывания с наклонной плоскости. По закону изменения механической энергии бруска имеем $\frac{mu^2}{2} - mgH = A_{\text{тр}}$, где $A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} s$ – работа силы трения скольжения, $F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha$ – модуль силы трения, а $s = \frac{H}{\sin \alpha}$ – перемещение бруска от верхней точки до основания наклонной плоскости. Из записанных выражений следует, что $u = \sqrt{2gH(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)}$. Аналогично находим, что модуль минимальной скорости, которую должен иметь брусок, чтобы подняться по наклонной плоскости на высоту H , равен $u_1 = \sqrt{2gH(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha)}$. Учитывая, что после удара о плиту направление скорости бруска изменится на противоположное, а ее модуль станет равным $u_1 = u + 2V$, приходим к равенству $\sqrt{2gH(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha)} = \sqrt{2gH(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)} + 2V$.

Ответ: $V = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2gH(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha)} - \sqrt{2gH(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)} \right)$.

II. Молекулярная физика и термодинамика

II.1. Внутренняя энергия одноатомного идеального газа равна $U = \frac{3}{2} \nu RT$. По условию $U = \alpha V^2$, где α – некоторый постоянный коэффициент. В соответствии с уравнением Менделеева–Клапейрона $\nu RT = pV$, поэтому в данном процессе $p \sim V$. Работу, совершённую газом, можно найти, вычислив площадь под графиком зависимости p от

V , которая равна $A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}(p_1V_2 - p_1V_1 + p_2V_2 - p_2V_1)$.
 Поскольку $p \sim V$, то $p_1V_2 = p_2V_1$ и $A = \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{1}{2}\nu R\Delta T$. Изменение внутренней энергии $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T$. Согласно первому закону термодинамики $Q = \Delta U + A$. В данном процессе $Q = \Delta U + \frac{\Delta U}{3} = \frac{4}{3}\Delta U$.
 Отсюда $\Delta U = \frac{3}{4}Q$. **Ответ:** $\Delta U = \frac{3}{4}Q = 15$ Дж.

II.2. Уравнения начального и конечного состояния пара имеют вид: $\phi_1 p_{н1} V = \frac{m_1}{M} RT_1$ и $p_{н2} V = \frac{m_2}{M} RT_2$, где m_1 и m_2 – начальная и конечная массы водяного пара, $T_1 = t_1 + 273$, $T_2 = t_2 + 273$. Учитывая, что масса образовавшейся воды $m = m_1 - m_2$, из записанных равенств находим $V = \frac{mR}{M(\phi_1 p_{н1}/T_1 - p_{н2}/T_2)}$. **Ответ:** $V = \frac{mR}{M\left(\frac{\phi_1 p_{н1}}{t_1 + 273} - \frac{p_{н2}}{t_2 + 273}\right)}$.

II.3. Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона, до сжатия парциальное давление пара в цилиндре было равно $p_0 = \frac{m_0}{MV} RT$, где R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура воздуха, V – его объём, M – молярная масса воды. По определению относительной влажности $\phi = \frac{p_0}{p_{н}}$, где $p_{н}$ – давление насыщенного пара. После сжатия пар достиг насыщения, и часть его сконденсировалась. В результате масса пара стала равной $m_0 - m$, а его объём (если пренебречь объёмом сконденсированной воды) – $\frac{V}{n}$. Поэтому $p_{н} = \frac{n(m_0 - m)RT}{MV}$.
 Решая совместно приведённые уравнения, получаем, что $m_0 = \frac{n\phi m}{n\phi - 1}$.

Ответ: $m_0 = \frac{n\varphi m}{n\varphi - 1} \approx 11$ г.

III. Электродинамика

III.1. Мощность, развиваемая нагревательным элементом сопротивлением R , подключенным к аккумулятору с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r , равна $N_1 = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(r+R)^2}$. При подключении этого же элемента к двум одинаковым аккумуляторам, соединенным последовательно, значения ЭДС и внутреннего сопротивления удваиваются. В этом случае нагреватель развивает мощность $N_2 = \frac{4\mathcal{E}^2 R}{(2r+R)^2}$. Составим

отношение: $\frac{N_2}{N_1} = \frac{4(r+R)^2}{(2r+R)^2}$, или $\sqrt{\frac{N_2}{N_1}} = \frac{2(r+R)}{2r+R}$. Выражая из послед-

него соотношения R , получаем, что $R = 2r \frac{\sqrt{N_2/N_1} - 1}{2 - \sqrt{N_2/N_1}}$.

Ответ. $R = 2r \frac{\sqrt{N_2/N_1} - 1}{2 - \sqrt{N_2/N_1}} = 1$ Ом.

III.2. По условию сопротивление нити накала лампы можно считать постоянным, поэтому оно равно $\frac{U^2}{N}$. В первом случае, когда к аккумулятору подключены параллельно две одинаковые лампы мощностью N_1 , сопротивление цепи равно $R_1 = \frac{U^2}{2N_1} + r$, а во втором случае, когда к аккумулятору подключены параллельно две разные лампы мощностями N_1 и N_2 , сопротивление цепи равно $R_2 = \frac{U^2}{N_1 + N_2} + r$. КПД

η любого источника по определению равен отношению мощности $W_{\text{н}}$, выделяющейся на нагрузке, к мощности $W_{\text{и}}$, развиваемой источником,

т.е. $\eta = \frac{W_{\text{н}}}{W_{\text{и}}}$. Нетрудно установить, что это отношение мощностей равно отношению сопротивления нагрузки $R_{\text{н}}$ к полному сопротивлению цепи $R_{\text{ц}} = R_{\text{н}} + r$. Таким образом, КПД источника может быть вычислен по формуле $\eta = \frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{н}} + r}$. Следовательно, искомое отношение КПД равно $n = \frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{(R_2 - r)R_1}{(R_1 - r)R_2}$. **Ответ:** $n = \frac{U^2 + 2N_1r}{U^2 + (N_1 + N_2)r} = 0,75$.

III.3. Площадь, ограниченная контуром, образованным неподвижным проводником и движущейся перемычкой, в момент времени t равна $S(t) = \frac{1}{2} vt \cdot 2vt \operatorname{tg} \alpha = v^2 t^2 \operatorname{tg} \alpha$, а в момент времени $t + \Delta t$ равна

$$S(t + \Delta t) = v^2 (t + \Delta t)^2 \operatorname{tg} \alpha = v^2 (t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) \operatorname{tg} \alpha \approx v^2 (t^2 + 2t\Delta t) \operatorname{tg} \alpha.$$

Следовательно, за малое время Δt площадь, ограниченная контуром, увеличивается на $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t) = 2v^2 t \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta t$. По закону электромагнитной индукции в контуре возникает ЭДС индукции, модуль которой $\mathcal{E} = \frac{B\Delta S}{\Delta t} = 2v^2 Bt \operatorname{tg} \alpha$. Сопротивление контура определяется

выражением $R = \frac{2vt}{\cos \alpha} (1 + \sin \alpha) \rho$. По закону Ома ток, текущий в контуре,

$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Bv \sin \alpha}{(1 + \sin \alpha) \rho}$. Используя правило Ленца, находим, что индукционный ток течет по часовой стрелке. **Ответ:** $I = \frac{Bv \sin \alpha}{(1 + \sin \alpha) \rho} \approx 3,3 \text{ мА}$.

IV. Оптика

IV.1. Ход одного из крайних лучей, образующих световой пучок, показан на рис. 52. Плоскую поверхность полушара луч пересекает без преломления, а при выходе из полушара в воздух преломляется на сферической поверхности, причем по закону Снеллиуса $\sin \beta = n \sin \alpha$. Из

рис. 54 видно, что условие задачи выполняется, если пучок фокусируется в точке с координатой $x = 3R$. Учитывая, что пучок узкий и, следовательно, α и β – малые углы, имеем приближенные

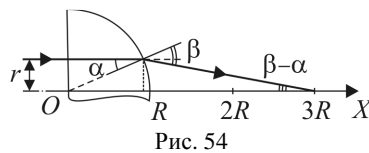


Рис. 54

равенства: $\beta \approx n\alpha$, $\frac{r}{R} \approx \alpha$, $\frac{r}{2R} \approx \beta - \alpha$. Исключая из этих равенств α и β , находим, что $n = 1,5$. **Ответ:** $n = 1,5$.

IV.2. Обозначив расстояние от предмета до переднего фокуса через x , получаем, что расстояние от предмета до линзы $a = f + x$, а расстояние от линзы до изображения $b = f + kx$ (рис. 55). По формуле

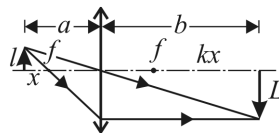


Рис. 55

линзы имеем $\frac{1}{f+x} + \frac{1}{f+kx} = \frac{1}{f}$, где f – фокусное расстояние линзы. Упростив это выражение, получаем, что

$f = \sqrt{k} \cdot x$. Увеличение, даваемое линзой, $\Gamma = \frac{L}{l} = \frac{f}{x} = \sqrt{k}$.

Ответ: $\Gamma = \sqrt{k} = 2$.

IV.3. Построение изображения источника приведено на рис. 56. Используя формулу тонкой линзы:

$\frac{1}{f+a \cos \alpha} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$, находим расстояние от

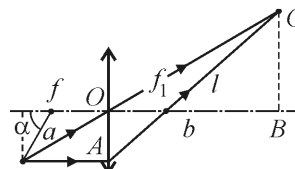


Рис. 56

линзы до изображения $b = f \left(1 + \frac{f}{a \cos \alpha} \right)$.

Из подобия $\triangle OAf_1$ и $\triangle BCf_1$ следует равен-

ство $\frac{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + f^2}}{f} = \frac{l}{b-f}$. Решая записанные уравнения, получаем,

что $l = \frac{f}{a \cos \alpha} \sqrt{f^2 + a^2 \sin^2 \alpha}$.

Ответ: $l = \frac{f}{a \cos \alpha} \sqrt{f^2 + a^2 \sin^2 \alpha} = 10\sqrt{7}$ см $\approx 24,6$ см.

Учебное издание

ФИЗИКА.

**ЗАДАЧИ ПРОФИЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА
И ОЛИМПИАД ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ В МГУ – 2014**

Оригинал-макет: *Чесноков С.С.*

Напечатано с готового оригинал-макета

Подписано в печать 24.11.2014 г. Печать офсетная. Бумага офсетная.
Формат 60x88 1/16. Усл.печ.л. 5,75. Тираж 1000 экз. Изд. № 274.

Издательство ООО «МАКС Пресс»
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.

119991, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова
2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8(495)939-3890/91. Тел./Факс 8(495)939-3891.

Отпечатано в ППП «Типография «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., 6
Заказ № 2234

