

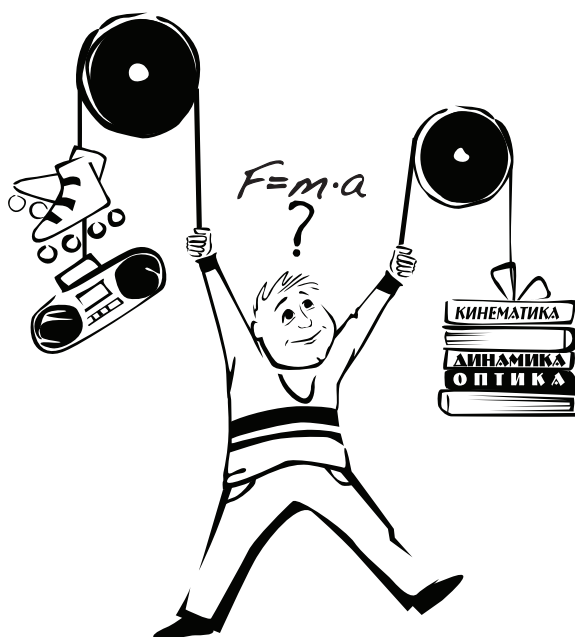


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИКА

ЗАДАЧИ ПРОФИЛЬНОГО
ЭКЗАМЕНА И ОЛИМПИАД
ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ
В МГУ – 2015

(с подробными решениями)



Москва
2015

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

ФИЗИКА
ЗАДАЧИ ПРОФИЛЬНОГО
ЭКЗАМЕНА И ОЛИМПИАД
ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ
В МГУ – 2015

(с подробными решениями)

МАКС ПРЕСС

Москва - 2015

УДК 53(075.3)
ББК 22.3я729

Коллектив авторов:

*Буханов В.М., Гайдукова И.Ю., Грачев А.В., Зотеев А.В., Козлов С.Н.,
Лукашева Е.В., Невзоров А.Н., Нетребко Н.В., Никитин С.Ю.,
Овченкова Ю.А., Парфенов К.В., Плотников Г.С., Погожев В.А.,
Полякова М.С., Поляков П.А., Скипетрова Л.А., Склянкин А.А.,
Чесноков С.С., Чистякова Н.И., Шленов С.А.*

Ф50

Физика. Задачи профильного экзамена и олимпиад для школьников в МГУ – 2015 (с подробными решениями) / Буханов В.М. и др.

Под ред. В.А. Макарова – М.: МАКС Пресс, 2015. – 96 с.: ил.

ISBN 978-5-317-05131-0

Сборник содержит материалы профильного вступительного экзамена и олимпиад для школьников по физике, проводившихся в МГУ в 2014 – 2015 годах. В начале сборника помещена Программа по физике для поступающих в МГУ. Далее следуют условия задач двух олимпиад по физике, вошедших в Перечень олимпиад школьников на 2014/2015 учебный год, утвержденный Минобразования РФ, а именно, двухтуровой олимпиады «Покори Воробьевы горы – 2015» и двухтуровой олимпиады «Ломоносов – 2014/2015». В конце первой части сборника помещены задания профильного экзамена по физике, проводившегося на физическом факультете МГУ и в его Севастопольском филиале.

Во второй части сборника приведены подробные решения всех задач, содержащие обоснования применимости используемых законов и допущений, а также анализ полученных ответов.

Для учащихся старших классов, абитуриентов, учителей и преподавателей, ведущих занятия по физике со школьниками.

УДК 53(075.3)
ББК 22.3я729

ISBN 978-5-317-05131-0

© Авторский коллектив, 2015

© Физический факультет МГУ, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Программа вступительных испытаний по физике	4	
	Условия	Решения
Олимпиада «Покори Воробьевы горы – 2015»	15	42
I. Отборочный этап	15	42
Задание для 7-х – 9-х классов	15	42
Задание для 10-х – 11-х классов	17	46
II. Заключительный этап	19	55
Задание для 7-х – 9-х классов	19	55
Задание для 10-х – 11-х классов	20	58
Механика	20	58
Молекулярная физика и термодинамика	22	64
Электродинамика	24	68
Оптика	26	73
Олимпиада «Ломоносов – 2014/2015»	28	77
I. Отборочный этап	28	77
Задание для 7-х – 9-х классов	28	77
Задание для 10-х – 11-х классов	30	79
Первый тур	30	79
Второй тур	32	82
II. Заключительный этап	33	84
Задание для 7-х – 9-х классов	34	84
Задание для 10-х – 11-х классов	35	86
Профильный экзамен 2015	37	89
I. Механика	37	89
II. Молекулярная физика и термодинамика	38	91
III. Электродинамика	39	92
IV. Оптика	40	93

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ ПО ФИЗИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В МГУ^{*)}

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Настоящая программа составлена на основе ныне действующих учебных программ для школ и классов с углубленным изучением физики.

При подготовке к экзамену основное внимание следует уделить выявлению сущности физических законов и явлений, умению истолковывать физический смысл величин и понятий, а также умению применять теоретический материал к решению задач. Необходимо уметь пользоваться при вычислениях системой СИ и знать внесистемные единицы, указанные в программе.

Глубина ответов на пункты программы определяется содержанием опубликованных учебников для школ и классов с углубленным изучением физики, указанных в конце настоящей программы.

1. МЕХАНИКА

1.1. Кинематика

Механическое движение. Относительность механического движения. Материальная точка. Система отсчета. Траектория. Вектор перемещения и его проекции. Путь.

Скорость. Сложение скоростей.

Ускорение. Сложение ускорений.

Прямолинейное равномерное и равнопеременное движения. Зависимости скорости, координат и пути от времени.

Криволинейное движение. Движение по окружности. Угловая скорость. Период и частота обращения. Ускорение тела при движении по окружности. Тангенциальное и нормальное ускорения.

Свободное падение тел. Ускорение свободно падающего тела. Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Дальность и высота полета.

Поступательное и вращательное движения твердого тела.

^{*)} Программа утверждена на заседании Ученого совета МГУ 8 декабря 2003 г.

1.2. Динамика

Взаимодействие тел. Первый закон Ньютона. Понятие об инерциальных и неинерциальных системах отсчета. Принцип относительности Галилея.

Сила. Силы в механике. Сложение сил, действующих на материальную точку.

Инертность тел. Масса. Плотность.

Второй закон Ньютона. Единицы измерения силы и массы

Третий закон Ньютона.

Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная. Сила тяжести. Зависимость силы тяжести от высоты.

Силы упругости. Понятие о деформациях. Закон Гука. Модуль Юнга.

Силы трения. Сухое трение: трение покоя и трение скольжения. Коэффициент трения. Вязкое трение.

Применение законов Ньютона к поступательному движению тел. Вес тела. Невесомость. Перегрузки.

Применение законов Ньютона к движению материальной точки по окружности. Движение искусственных спутников. Первая космическая скорость.

1.3. Законы сохранения в механике

Импульс (количество движения) материальной точки. Импульс силы. Связь между приращением импульса материальной точки и импульсом силы. Импульс системы материальных точек. Центр масс системы материальных точек. Закон сохранения импульса. Реактивное движение.

Механическая работа. Мощность. Энергия. Единицы измерения работы и мощности.

Кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек. Связь между приращением кинетической энергии тела и работой приложенных к телу сил.

Потенциальная энергия. Потенциальная энергия тел вблизи поверхности Земли. Потенциальная энергия упруго деформированного тела.

Закон сохранения механической энергии.

1.4. Статика твердого тела

Сложение сил, приложенных к твердому телу. Момент силы относительно оси вращения. Правило моментов.

Условия равновесия тела. Центр тяжести тела. Устойчивое, неустойчивое и безразличное равновесия тел.

1.5. Механика жидкостей и газов

Давление. Единицы измерения давления: паскаль, мм рт. ст.

Закон Паскаля. Гидравлический пресс. Давление жидкости на дно и стенки сосуда. Сообщающиеся сосуды.

Атмосферное давление. Опыт Торричелли. Изменение атмосферного давления с высотой.

Закон Архимеда для тел, находящихся в жидкости или газе. Плавание тел.

Движение жидкостей. Уравнение Бернулли.

1.6. Механические колебания и волны. Звук

Понятие о колебательном движении. Период и частота колебаний.

Гармонические колебания. Смещение, амплитуда и фаза при гармонических колебаниях.

Свободные колебания. Колебания груза на пружине. Математический маятник. Периоды их колебаний. Превращения энергии при гармонических колебаниях. Затухающие колебания.

Вынужденные колебания. Резонанс.

Понятие о волновых процессах. Поперечные и продольные волны. Длина волны. Скорость распространения волн. Фронт волны. Уравнение бегущей волны. Стоячие волны.

Интерференция волн. Принцип Гюйгенса. Дифракция волн.

Звуковые волны. Скорость звука. Громкость и высота звука.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

2.1. Основы молекулярно-кинетической теории

Основные положения молекулярно-кинетической теории и их опытное обоснование. Броуновское движение. Масса и размер молекул. Моль вещества. Постоянная Авогадро. Характер движения молекул в газах, жидкостях и твердых телах.

Тепловое равновесие. Температура и ее физический смысл. Шкала температур Цельсия.

Идеальный газ. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа. Средняя кинетическая энергия молекул и температура. Постоянная Больцмана. Абсолютная температурная шкала.

Уравнение Клапейрона-Менделеева (уравнение состояния идеального газа). Универсальная газовая постоянная. Изотермический, изохорный и изобарный процессы.

2.2. Элементы термодинамики

Термодинамическая система. Внутренняя энергия системы. Количество теплоты и работа как меры изменения внутренней энергии. Теплоемкость тела. Понятие об адиабатическом процессе. Первый закон термодинамики. Применение первого закона термодинамики к изотермическому, изохорному и изобарному процессам. Расчет работы

газа с помощью pV -диаграмм. Теплоемкость одноатомного идеального газа при изохорном и изобарном процессах.

Необратимость процессов в природе. Второй закон термодинамики. Физические основы работы тепловых двигателей. КПД теплового двигателя и его максимальное значение.

2.3. Изменение агрегатного состояния вещества

Парообразование. Испарение, кипение. Удельная теплота парообразования. Насыщенный пар. Зависимость давления и плотности насыщенного пара от температуры. Зависимость температуры кипения от давления. Критическая температура.

Влажность. Относительная влажность.

Кристаллическое и аморфное состояние вещества. Удельная теплота плавления.

Уравнение теплового баланса.

2.4. Поверхностное натяжение в жидкостях

Сила поверхностного натяжения. Явления смачивания и несмачивания. Давление под искривленной поверхностью жидкости. Капиллярные явления.

2.5. Тепловое расширение твердых тел и жидкостей

Тепловое линейное расширение. Тепловое объемное расширение. Тепловое расширение жидкостей. Особенности теплового расширения воды.

3. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

3.1. Электростатика

Электрические заряды. Элементарный электрический заряд. Проводники и диэлектрики. Закон сохранения электрического заряда.

Взаимодействие электрически заряженных тел. Электроскоп. Точечный заряд. Закон Кулона.

Электрическое поле. Напряженность электрического поля. Линии напряженности электрического поля (силовые линии). Однородное электрическое поле. Напряженность электростатического поля точечного заряда. Принцип суперпозиции полей. Теорема Гаусса. Поле равномерно заряженных плоскости, сферы и шара.

Работа сил электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Связь разности потенциалов с напряженностью электростатического поля. Потенциал поля точечного заряда. Эквипотенциальные поверхности.

Проводники и диэлектрики в электростатическом поле. Диэлектрическая проницаемость вещества. Электроемкость. Конденсаторы. Поле плоского конденсатора. Электроемкость плоского конденсатора. Последовательное и параллельное соединение конденсаторов. Энергия заряженного конденсатора.

Энергия электрического поля.

3.2. Постоянный ток

Электрический ток. Сила тока. Условия существования тока в цепи. Электродвижущая сила (ЭДС). Напряжение.

Закон Ома для участка цепи. Омическое сопротивление проводника. Удельное сопротивление. Зависимость удельного сопротивления от температуры. Сверхпроводимость. Последовательное и параллельное соединение проводников. Измерение силы тока, напряжения и сопротивления.

Закон Ома для полной цепи. Источники тока, их соединение. Правила Кирхгофа.

Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца.

Электрический ток в металлах.

Электрический ток в электролитах. Законы электролиза.

Электрический ток в вакууме. Термоэлектронная эмиссия. Электронная лампа – диод. Электронно-лучевая трубка.

Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников. Зависимость проводимости полупроводников от температуры. *p-n* – переход и его свойства. Полупроводниковый диод. Транзистор. Термистор и фоторезистор.

Электрический ток в газах. Самостоятельный и несамостоятельный разряды. Понятие о плазме.

3.3. Магнетизм

Магнитное поле. Действие магнитного поля на рамку с током. Индукция магнитного поля (магнитная индукция). Линии магнитной индукции. Картины магнитного поля прямого тока и соленоида. Понятие о магнитном поле Земли.

Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Закон Ампера.

Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.

Магнитные свойства вещества. Гипотеза Ампера. Ферромагнетика.

3.4. Электромагнитная индукция

Магнитный поток. Опыты Фарадея. Явление электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца.

Самоиндукция. Индуктивность. ЭДС самоиндукции.

Энергия магнитного поля тока.

3.5. Электромагнитные колебания и волны

Переменный электрический ток. Амплитудное и действующее (эффективное) значение периодически изменяющегося напряжения и тока.

Получение переменного тока с помощью индукционных генераторов. Трансформатор. Передача электрической энергии.

Колебательный контур. Свободные электромагнитные колебания в контуре. Превращение энергии в колебательном контуре. Уравнение, описывающее процессы в колебательном контуре, и его решение. Формула Томсона для периода колебаний. Затухающие электромагнитные колебания.

Вынужденные колебания в электрических цепях. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления в цепи гармонического тока. Резонанс в электрических цепях.

Открытый колебательный контур. Опыты Герца. Электромагнитные волны. Их свойства. Шкала электромагнитных волн. Излучение и прием электромагнитных волн. Принципы радиосвязи.

4. ОПТИКА

4.1. Геометрическая оптика

Развитие взглядов на природу света. Закон прямолинейного распространения света. Понятие луча.

Интенсивность (плотность потока) излучения. Световой поток. Освещенность.

Законы отражения света. Плоское зеркало. Сферическое зеркало. Построение изображений в плоском и сферическом зеркалах.

Законы преломления света. Абсолютный и относительный показатели преломления. Ход лучей в призме. Явление полного (внутреннего) отражения.

Тонкие линзы. Фокусное расстояние и оптическая сила линзы. Построение изображения в собирающих и рассеивающих линзах. Формула линзы. Увеличение, даваемое линзами.

Оптические приборы: лупа, фотоаппарат, проекционный аппарат, микроскоп. Ход лучей в этих приборах. Глаз.

4.2. Элементы физической оптики

Волновые свойства света. Поляризация света. Электромагнитная природа света.

Скорость света в однородной среде. Дисперсия света. Спектроскоп. Инфракрасное и ультрафиолетовое излучения.

Интерференция света. Когерентные источники. Условия образования максимумов и минимумов в интерференционной картине.

Дифракция света. Опыт Юнга. Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракционная решетка.

Корпускулярные свойства света. Постоянная Планка. Фотоэффект. Законы фотоэффекта. Фотон. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Давление света. Опыты Лебедева по измерению давления света.

Постулаты теории относительности (постулаты Эйнштейна). Связь между массой и энергией.

5. АТОМ И АТОМНОЕ ЯДРО

Опыты Резерфорда по рассеянию α -частиц. Планетарная модель атома. Квантовые постулаты Бора. Испускание и поглощение энергии атомом. Непрерывный и линейчатый спектры. Спектральный анализ.

Экспериментальные методы регистрации заряженных частиц: камера Вильсона, счетчик Гейгера, пузырьковая камера, фотоэмульсионный метод.

Состав ядра атома. Изотопы. Энергия связи атомных ядер. Понятие о ядерных реакциях. Радиоактивность. Виды радиоактивных излучений и их свойства. Цепные ядерные реакции. Термоядерная реакция.

Биологическое действие радиоактивных излучений. Защита от радиации.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Физика: Механика. 10 кл.: Учебник для углубленного изучения физики /Под ред. Г.Я. Мякишева. – М.: Дрофа, 2001.
2. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика: Молекулярная физика. Термодинамика. 10 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
3. Мякишев Г.Я., Синяков А.З., Слободсков Б.А. Физика: Электродинамика. 10 – 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
4. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика: Колебания и волны. 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
5. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика: Оптика. Квантовая физика. 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. – М.: Дрофа, 2001.
6. Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М. Задачи по элементарной физике. – М.: Физматлит, 2000 и последующие издания.
7. Бендриков Г.А., Буховцев Б.Б., Керженцев В.Г., Мякишев Г.Я. Физика. Для поступающих в вузы: Учебн. пособие. Для подготов. отделений вузов. – М.: Физматлит, 2000 и последующие издания.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Грачев А.В., Погожев В.А., Селиверстов А.В. Физика: 7 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2007.
2. Грачев А.В., Погожев В.А., Вишнякова Е.А. Физика: 8 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2008.
3. Грачев А.В., Погожев В.А., Боков П.Ю. Физика: 9 класс: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2010.
4. Грачев А.В., Погожев В.А., Салецкий А.М., Боков П.Ю. Физика: 10 класс: Базовый уровень; профильный уровень: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2011.

5. Грачев А.В., Погожев В.А., Салецкий А.М., Боков П.Ю. Физика: 11 класс: Базовый уровень; профильный уровень: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2012.
6. Элементарный учебник физики /под ред. Г.С. Ландсберга. В 3-х кн. – М.: Физматлит, 2000 и последующие издания.
7. Яворский Б.М., Селезнев Ю.Д. Физика. Справочное пособие. Для поступающих в вузы. – М.: Физматлит, 2000 и последующие издания.
8. Физика. Учебники для 10 и 11 классов школ и классов с углубленным изучением физики /под ред. А.А. Пинского. – М.: Просвещение, 2000 и последующие издания.
9. Бутиков Е.И., Кондратьев А.С. Физика. В 3-х кн. М.: Физматлит, 2001.
10. Павленко Ю.Г. Физика. Полный курс для школьников и поступающих в вузы: Учебное пособие. – М.: Большая Медведица, 2002.
11. Сборник задач по физике /под ред. С.М. Козела – М.: Просвещение, 2000 и предшествующие издания.
12. Гольдфарб Н.И. Физика. Задачник. 9 – 11 кл.: Пособие для общеобразовательных учебных заведений. – М.: Дрофа, 2000 и последующие издания.
13. Задачи по физике /под ред. О.Я. Савченко – М.: Наука, 1988.
14. Задачи вступительных экзаменов и олимпиад по физике в МГУ – 1992–2013. – М.: Физический факультет МГУ, 2013 и предшествующие издания.
15. Отличник ЕГЭ. Физика. Решение сложных задач /под ред. В.А. Макарова, М.В. Семенова, А.А. Якуты; ФИПИ. – М.: Интеллект–Центр, 2010.
16. Драбович К.Н., Макаров В.А., Чесноков С.С. Физика. Подготовка к вступительным испытаниям в МГУ. – М.: Макс Пресс, 2009.
17. Драбович К.Н., Макаров В.А., Чесноков С.С. Физика. 770 задач с подробными решениями. – М.: Макс Пресс, 2009.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ – 2015»

В 2015 году МГУ совместно с газетой «Московский комсомолец» в одиннадцатый раз подряд проводили олимпиаду «Покори Воробьевы горы», которая традиционно проходила в два этапа: отборочный и заключительный. Отборочный этап проводился в виде заочного испытания в период с 5 ноября по 25 декабря 2014 года. Условия задач отборочного этапа были доступны каждому участнику в его личном кабинете на сайте олимпиады <http://pvg.mk.ru>. Ученики 7-х – 9-классов могли выполнять задания и присылать решения и ответы в течение всего этого периода. Для учеников 10-х – 11-х классов доступ к заданиям и прием решений были возможны только в течение так называемой сессии отборочного этапа продолжительностью 168 часов, начало которой каждый школьник выбирал по собственному усмотрению.

Ниже приведены задачи, предлагавшиеся на отборочном этапе олимпиады «Покори Воробьевы горы – 2015».

I. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Задания для 7-х – 9-х классов

1.1. Тетрадные измерения. Возьмите лист из стандартной тетради «в клеточку». Не пользуясь ничем, кроме ножниц, двух деревянных планок и самого листа, измерьте его толщину. Опишите методику измерений, выполните их для имеющегося у Вас подходящего листа. Какое значение толщины Вы получили? Какова точность Вашего результата (постарайтесь сделать так, чтобы она была достаточно хорошей и используйте для этого все разрешенное оборудование)?

1.2. Гонки по наклонной. Два ученика 7-го класса – Петр и Василий поднимались, стоя на эскалаторе, двигавшемся со скоростью u . Доехав до середины подъема, они, сговорившись заранее, одновременно перебросили свои портфели на параллельный эскалатор, который двигался вниз с такой же скоростью. Сразу после этого они побежали за своими портфелями разными путями. Петр побежал по своему эскалатору вверх, где быстро перескочил на спускающийся эскалатор и побежал по нему вслед за портфелями. Василий побежал по своему эскалатору вниз, где также быстро перескочил на встречный эскалатор и по-

бежал по нему навстречу портфелям. Оба бежали с максимальными для себя скоростями, которые для обоих мальчиков одинаковы: по неподвижному эскалатору вверх они могут бежать со скоростью v_1 , а вниз – со скоростью v_2 . При каком соотношении между u , v_1 и v_2 Петр и Василий одновременно добегут до портфелей, причем их встреча произойдет на спускающемся эскалаторе? Перечислить все возможные варианты, приняв во внимание, что по условию задачи все скорости отличны от нуля.

I.3. Тепловой подъемник. Талантливый инженер Савелий Умкин сконструировал подъемник, представлявший собой вертикальную гладкую теплоизолирующую трубу, герметично закрытую с нижнего конца, внутри которой находится подвижный горизонтальный легкий поршень. Под поршнем находится вода, а подъем поршня происходит за счет ее испарения. Однажды зимой инженер включил нагреватель своей машины, когда под поршнем были равные количества воды и льда в равновесии. В процессе нагрева воды до $t_1 = 100^\circ\text{C}$ он постепенно нагружал поршень так, чтобы он оставался на месте. После того, как температура достигла этого значения, инженер перестал нагружать поршень, и тот поехал вверх. Поршень достиг конца трубы, где ударился о специальные упоры и сбросил груз точно к тому моменту, когда вся вода испарилась. Определите КПД подъемника в описанном процессе, то есть отношение работы пара над поршнем в процессе подъема к количеству теплоты, сообщенному воде от нагревателя. Используйте следующие данные: удельная теплота плавления льда $\lambda \approx 334$ кДж/кг, удельная теплоемкость жидкой воды $c \approx 4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $r \approx 2480$ кДж/кг, плотность насыщенного водяного пара при 100°C $\rho \approx 0,59$ кг/м³, давление насыщенного водяного пара при этой температуре $p \approx 101$ кПа.

I.4. Пружина против Архимеда. На дне бассейна лежит куб с длиной ребра a , изготовленный из материала, плотность которого в пять раз меньше плотности воды. К центру нижней грани куба прикреплен конец невесомой пружины, длина которой в недеформированном состоянии равна $l = 4a$. Второй конец пружины закреплен на дне бассейна. Кольца пружины достаточно мягкие, а проволока, из которой она изготовлена, достаточно тонкая, так что куб, несмотря на пружину, ле-

жит на дне практически ровно, приподнимаясь над дном на расстояние, много меньшее a . В бассейн налили воду до уровня H относительно дна бассейна. Какая часть объема куба будет находиться под водой в состоянии равновесия? Известно, что при подвешивании куба на этой пружине к потолку в воздухе удлинение пружины равно $\Delta l = \frac{a}{4}$.

Задания для 10-х –11-х классов

(Приключения экспериментатора Трурля)

1.5. Загадочная жидкость. Однажды Трурль нашел емкость с неизвестной прозрачной жидкостью. Он взял синий светодиод и поместил его перед тонкой линзой таким образом, что светодиод светил строго по главной оси линзы. Диаметр выходного отверстия («глазка») светодиода $d = 2,4$ мм. Оказалось, что четкое изображение глазка светодиода на правильно размещенном экране имеет диаметр $d_1 = 1,2$ мм. Когда Трурль поместил светодиод и линзу в жидкость (не меняя относительного положения светодиода и линзы), диаметр четкого изображения глазка стал $d_2 = 4,2$ мм (при новом положении экрана). Показатель преломления вещества линзы $n = 2,5$. Найдите показатель преломления n_0 жидкости.

1.6. Вариоконд. Исследуя свойства синтезированного им диэлектрика, Трурль обнаружил, что его диэлектрическая проницаемость зависит от напряженности электрического поля в нем, причем эта зависимость описывается формулой $\epsilon = \frac{3}{2} \left[1 + \frac{E}{E_0} \right]$, где E_0 – некоторая константа. Тогда он взял два одинаковых воздушных плоских конденсатора с расстоянием между обкладками d , один из них зарядил до напряжения $U_0 = E_0 d$, а другой полностью заполнил диэлектриком. Затем Трурль соединил попарно обкладки конденсаторов проводами. Во сколько раз n уменьшится заряд воздушного конденсатора за достаточно большое время после соединения?

1.7. Планета, которая гуляла сама по себе. В одном из путешествий Трурль наткнулся на планету, которая, не вращаясь, двигалась

Условия задач

равномерно (относительно центра Галактики) в межзвездном пространстве. Планета оказалась твердым шаром с ровной поверхностью и очень тонкой (по сравнению с радиусом планеты) атмосферой из гелия и аргона с относительной влажностью (по аргону) $\phi_0 = 60\%$. За счет медленного распада радиоактивных веществ в глубине планеты на ее поверхности и во всей атмосфере поддерживалась постоянная температура, превышающая 90 К. У Трурля был с собой прибор, позволяющий дистанционно регулировать скорость радиоактивного распада, с помощью которого он стал плавно уменьшать температуру поверхности планеты. Когда температура понизилась на $x_1 = 0,8\%$, на поверхности выпала роса. Опишите рост глубины аргонового океана на поверхности планеты при дальнейшем снижении температуры. На сколько процентов (от начальной) нужно еще снизить температуру поверхности, чтобы глубина океана стала равна половине от максимально возможной? В рассматриваемом диапазоне температур давление насыщенных паров аргона можно считать линейной функцией температуры, а тепловым расширением жидкого аргона можно пренебречь.

1.8. Несвободное падение. Как-то Трурль раздобыл высокоскоростную видеокамеру и точные электронные весы. Тогда он взял маленький шарик, и измерил его массу. Она оказалась равна $m = (0,36 \pm 0,01)$ г. Затем экспериментатор стал снимать падение шарика с разных высот h и, используя специальную программу, определять скорость шарика перед ударом о землю v^* и время падения t^* . В результате у него получилась следующая таблица (все величины измерены с точностью до единицы последнего указанного разряда).

h , м	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00
v^* , м/с	4,21	5,83	7,03	8,00	8,84	9,56	10,22
t^* , с	0,463	0,662	0,818	0,951	1,070	1,178	1,279
8,00	9,00	10,00	11,00	12,00	13,00	14,00	15,00
10,82	11,37	11,88	12,35	12,80	13,22	13,61	13,98
1,374	1,465	1,551	1,633	1,713	1,790	1,865	1,938

Кроме того, из геофизических данных он нашел, что ускорение свободного падения в районе измерений $g = (9,81 \pm 0,01)$ м/с². Предложите физическую модель, описывающую падение шарика и согласующуюся с измерениями Трурля с ошибкой не более 5%. Ваша модель должна опи-

сывать действующие на шарик силы с такой же точностью, причем уровень точности должен быть указан явно и обоснован.

II. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Победители отборочного этапа были приглашены на заключительный этап, который проходил в шести городах России: Брянске, Москве, Ставрополе, Уфе, Чебоксарах и Челябинске. Для учеников 7-х – 9-х классов выполнение заданий заключительного этапа было организовано в школах по месту их проживания. Задания заключительного этапа содержали четыре теоретических вопроса и четыре дополняющих их задачи. Ниже приведены задачи, предлагавшиеся на заключительном этапе олимпиады «Покори Воробьевы горы – 2015».

Задания для 7-х – 9-х классов

II.1. Юные техники собрали для испытания своих моделей круглый трек, состоящий из трех дорожек (рис. 1). Внутренняя дорожка покоится, средняя вращается по часовой стрелке с линейной скоростью точек на окружности 1 м/с, а внешняя вращается в ту же сторону, что и средняя, с линейной скоростью точек на окружности 1,9 м/с. Когда по треку по часовой стрелке запустили модель автомобильчика, оказалось, что наименьшее время для совершения круга понадобилось автомобильчику, движущемуся по средней дорожке, а наибольшее – движущемуся по внутренней дорожке. Определите скорость модели с ошибкой не более 0,2 м/с, если радиусы дорожек $R_1 = 5$ м, $R_2 = 7$ м, $R_3 = 9$ м. Какова наилучшая возможная точность?

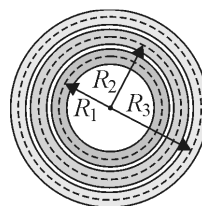


Рис. 1

II.2. К дню рождения мамы ученик 8 класса Вова решил сварить компот. Он смешал в кастрюле воду, изюм, орехи, мед и килограмм варенья, и поставил кастрюлю на плиту. Через $T = 25$ минут компот закипел. Вова испугался и долил туда холодной воды. До какой температуры охладился компот, если в следующий раз он закипел через $\tau = 4$ минуты? Компот кипит при $t_1 = 100$ °С, температура изначальных ингредиентов и холодной воды $t_0 = 20$ °С. Можно считать, что скорость поступления теплоты от плиты к содержимому кастрюли и скорость утечки теплоты из кастрюли в окружающую среду практически постоянны.

II.3. Ученик подключил к аккумулятору два резистора с сопротивлениями $R_1 = 40$ Ом и $R_2 = 60$ Ом, амперметр и три одинаковых вольтметра по схеме, показанной на рис. 2. Амперметр и вольтметры не идеальны – в частности, внутренние сопротивления вольтметров равны $R_V = 0,5$ МОм (1 МОм = $1\,000\,000$ Ом). Амперметр показывает ток $I = 0,6$ А. Каковы показания вольтметров? Цена деления шкалы у вольтметров $\Delta V = 0,1$ В.

Рис. 2

II.4. Обезьянка массой $M = 21$ кг повисла, ухватившись передними лапами за конец легкой нерастяжимой веревки и хвостом за один из блоков системы, изображенной на рис. 3. При этом система оказалась в равновесии. Затем обезьянка стала выбирать передними лапами веревку так, что конец веревки опускался вниз со скоростью $u = 1$ м/с. Так было до тех пор, пока подвижный блок, за который хвостом держалась обезьянка, не столкнулся с расположенным над ним подвижным блоком. В момент начала подъема расстояние между этими блоками по вертикали было равно $h = 3$ м. Чему равна масса груза m ? Найти время подъема. Какую работу совершила обезьянка за все время, прошедшее с момента, когда она еще покоилась, до момента столкновения блоков? Все блоки очень легкие, веревка по ним не скользит. Трения в осях блоков нет.

Рис. 3

Задания для 10-х – 11-х классов

Механика

II.5. Две небольшие шайбы с массами m и $2m$, связанные легкой нерастяжимой нитью длиной L , скользят по гладкой горизонтальной поверхности. Нить натянута. Найдите силу натяжения нити, если известно, что в некоторый момент времени, когда более легкая шайба двигалась вдоль нити со скоростью v , величина скорости более тяжелой шайбы была в два раза больше.

II.6. Один из концов легкой нерастяжимой нити прикреплен к раме массой M , а на другом подвешен груз массой m . С помощью системы идеальных блоков и этой нити груз и рама связаны с неподвижной стенкой (рис. 4). Если раму удерживать, то неподвижный груз касается рамы. Трения между грузом и рамой нет, коэффициент трения между рамой и горизонтальной поверхностью равен μ . Найти ускорение рамы после отпускания. Ускорение свободного падения g .

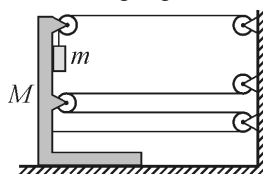


Рис. 4

II.7. Гантель из двух массивных одинаковых шариков и легкого жесткого стержня поставлена вертикально в гладкий угол между вертикальной стеной и горизонтальным полом (рис. 5). Верхний шарик подталкивают от стены, сообщая ему скорость v_0 , но оставляя в покое нижний шарик. Каким будет угол наклона стержня к вертикали в тот момент, когда сила давления нижнего шарика на стенку будет максимальна? Длина стержня L , ускорение свободного падения g .

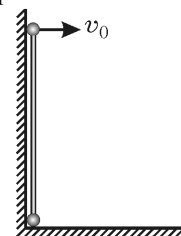


Рис. 5

II.8. Кольцо радиуса $a = 4$ см скользит, не вращаясь, по гладкому горизонтальному льду со скоростью $v_0 = 1$ м/с и ударяется о вертикальный борт. Если скорость кольца направлена перпендикулярно борту, то удар будет упругим, и кольцо после удара будет двигаться поступательно. Найти угловую скорость вращения кольца после удара, если угол между нормалью к борту и скоростью кольца $\alpha = 45^\circ$ (рис. 6). Коэффициент трения между кольцом и бортом $\mu = 0,25$.

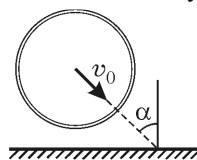


Рис. 6

II.9. Клин с углом α при вершине может скользить без трения по вертикальным направляющим и опирается на брусок, стоящий на горизонтальной поверхности (рис. 7). Масса бруска в $n = 2$ раза больше массы клина, высота бруска во столько же раз больше его ширины, коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 2/3$. При каких значениях α брусок может покоиться?

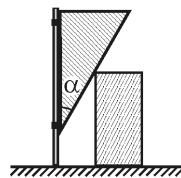


Рис. 7

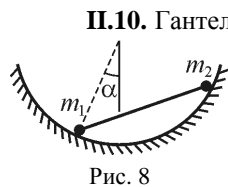


Рис. 8

II.10. Гантель из легкого жесткого стержня и двух массивных маленьких шариков одинакового радиуса положили в гладкую полусферическую «ямку» (рис.8). Длина стержня в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса ямки. Оказалось, что гантель находится в равновесии, если радиус, проведенный к первому шарiku, составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с вертикалью. Найти отношение масс шариков.

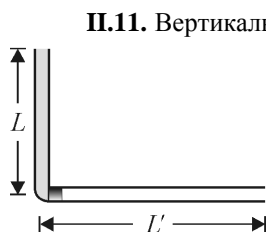


Рис. 9

II.11. Вертикальное колено изогнутой под прямым углом гладкой трубки постоянного сечения заполнено жидкостью, которую можно считать практически идеальной (рис. 9). Высота этого колена равна L и существенно больше поперечного размера трубки. Переливание жидкости в горизонтальное колено не допускается благодаря удерживаемой неподвижно легкой пробке. В некоторый момент пробку аккуратно отпускают. За какое время после этого пробка вылетит из трубки? Длина горизонтального колена $L' = \frac{3}{2}L$. Поверхностное натяжение жидкости можно не учитывать.

Молекулярная физика и термодинамика

II.12. В вертикальном цилиндре с гладкими стенками под подвижным поршнем, расположенным на высоте $h_0 = 63$ см над дном цилиндра, находится гелий. На поршень медленно насыпали песок. В результате высота положения поршня уменьшилась до $h_1 = 21$ см. Затем треть песка аккуратно убрали. На какой высоте теперь располагается поршень? Температура содержимого цилиндра и давление воздуха над цилиндром оставались неизменными.

II.13. Некоторое количество азота охлаждают так, что его давление меняется пропорционально его объему. Затем его нагревают при постоянном объеме до начальной температуры. Найдите отношение количества теплоты, отданного газом, к количеству теплоты, полученному им. Азот при рассматриваемых температурах можно считать идеальным газом.

П.14. Для адиабатного увеличения давления $\nu = 2$ молей гелия на 0,5% потребовалось совершить над гелием работу $A = 12,46$ Дж. Найти начальную температуру гелия. Универсальная газовая постоянная $R \approx 8,31$ Дж/(моль·К).

П.15. На рис. 10 представлена pV -диаграмма циклического процесса, совершаемого над одноатомным идеальным газом, являющимся рабочим телом тепловой машины. Диаграмма цикла имеет вид равнобедренного треугольника, основание которого параллельно оси OV , а продолжение одной из сторон проходит через начало координат. Известно, что при изобарном расширении абсолютная температура газа возрастает в $n = 2$ раза. Найти коэффициент полезного действия этого цикла.

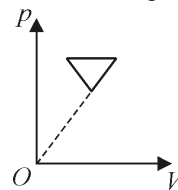


Рис. 10

П.16. На рис. 11 представлена pV -диаграмма процесса над идеальным одноатомным газом, некоторое количество которого является рабочим телом тепловой машины. В этом цикле расширение газа происходит адиабатно. Давление газа в точке 2 на $n\%$ больше его давления в точке 1, а объем в точке 3 – на $k\%$ больше объема в точке 1. Известно, что n и k связаны соотношением: $n/k = 8/3$. Найти коэффициент полезного действия этого цикла.

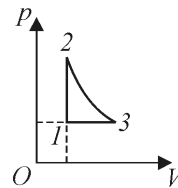


Рис. 11

П.17. Прочный баллон емкостью $V = 20$ л заполнили смесью метана (CH_4) и кислорода (O_2) при температуре $t_0 = 28^\circ\text{C}$. В баллоне произвели маломощный разряд, вызвавший химическую реакцию $\text{CH}_4 + 2\text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$, а затем остудили его содержимое до температуры $t_1 = 100^\circ\text{C}$. После этого на стенках сосуда выступили мелкие капельки воды общей массой $m \approx 1$ г, а давление в баллоне стало равно $p \approx 1,775 \cdot 10^5$ Па. Найти давление в баллоне до начала реакции. Какими могли быть массы газов, закаченных в баллон? Молярные массы считать равными: для метана $\mu_1 \approx 16$ г/моль, воды $\mu_2 \approx 18$ г/моль, кислорода $\mu_3 \approx 32$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R \approx 8,31$ Дж/(моль·К).

П.18. Герметичный гладкий вертикальный цилиндр сечением S разделен на две части тяжелым теплоизолирующим подвижным поршнем массой M . Под поршнем находится гелий, начальное давление которого равно p , а над поршнем – насыщенный водяной пар при температуре T . Гелий медленно нагревают, а температуру пара поддерживают постоянной. Во сколько раз отличается количество теплоты, отведенное от пара, от количества теплоты, сообщенного гелию? Молярную массу μ и удельную теплоту парообразования r воды, а также универсальную газовую постоянную R и ускорение свободного падения g считать известными.

Электродинамика

П.19. Три одинаковых непроводящих кольца радиуса a располо-

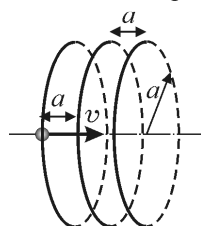


Рис. 12

жены так, что их оси совпадают, на одинаковом расстоянии, равном также a (рис. 12). На кольца нанесен равномерно распределенный заряд: $-Q$ – на крайние, и $+2Q$ – на среднее. С какой скоростью нужно запустить вдоль оси колец с расстояния a от плоскости крайнего кольца маленький шарик с зарядом $+q$ ($q \ll Q$) и массой m , чтобы он пролетел все три кольца насквозь? Электрическая постоянная ϵ_0 .

П.20. Три шара радиуса $a = 40$ см расположены так, что их центры находятся на одной прямой на расстоянии $3a = 120$ см друг от друга (рис. 13). Крайние шары – непроводящие, и по

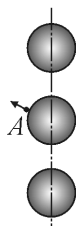


Рис. 13

по поверхности каждого из них равномерно распределен заряд $q = 1$ мкКл. Средний шар – проводящий, и его заряд равен $-2q = -2$ мкКл. От точки A на поверхности среднего шара оторвался без начальной скорости ион с удельным зарядом $\beta = 2,5 \cdot 10^6$ Кл/кг, и удалился на большое расстояние от шаров. До какой скорости он при этом разогнался? Излучением пренебречь. Константа в законе Кулона $k \approx 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл².

П.21. Два маленьких шарика с зарядами $+q$ каждый надеты на непроводящий вертикальный стержень. Нижний шарик закреплен, а

верхний может свободно скользить по стержню. Расстояние между шариками в положении равновесия равно L . Найдите период малых колебаний верхнего шарика. Трением пренебречь. Ускорение свободного падения g .

II.22. В схеме, изображенной на рис. 14, все резисторы одинаковы и сопротивление каждого из них $R = 100$ Ом. Все источники тоже одинаковы, их ЭДС $\mathcal{E} = 16$ В, а их внутренние сопротивления пренебрежимо малы. Амперметр и вольтметр для данной схемы являются практически идеальными. Найти их показания.

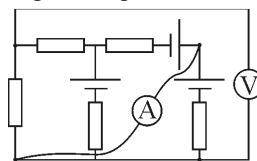


Рис. 14

II.23. В схеме, приведенной на рис. 15, диод можно считать идеальным. ЭДС аккумуляторов равны $\mathcal{E}_1 = 36$ В и $\mathcal{E}_2 = 32$ В, их внутренние сопротивления $r_1 = 5$ Ом и $r_2 = 2$ Ом соответственно. Нагрузкой являются два резистора с одинаковым сопротивлением $R = 50$ Ом каждый, соединенные параллельно. Во сколько раз n изменится выделяющаяся на нагрузке мощность P , если подключить в качестве нагрузки эти же два резистора, соединенные последовательно?

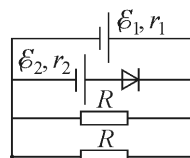


Рис. 15

II.24. В схеме, показанной на рис. 16 слева, диод D не является идеальным: его вольтамперная характеристика изображена в правой части рис. В некоторый момент времени, когда ток в катушке был равен нулю, ключ замкнули. Найти силу тока, который будет течь через резистор спустя достаточно большой промежуток времени. ЭДС и внутреннее сопротивление источника равны соответственно \mathcal{E} и r , омическое сопротивление катушки равно по величине внутреннему сопротивлению источника, сопротивление резистора R и пороговое напряжение диода U_0 считать известными.

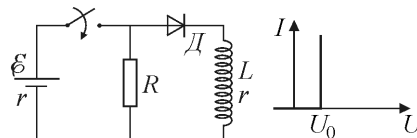


Рис. 16

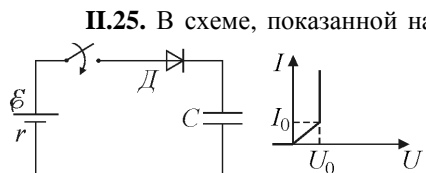


Рис. 17

П.25. В схеме, показанной на рис. 17 слева, диод D не является идеальным: его вольтамперная характеристика изображена в правой части рис. Перед сборкой схемы конденсатор емкостью $C = 20$ мкФ был разряжен. После замыкания ключа он заряжается от источника с ЭДС $\mathcal{E} = 24$ В. Какое количество теплоты Q выделится в схеме в процессе зарядки? Какая часть η этой теплоты (в процентах) выделится в диоде? Пороговое напряжение диода U_0 в $n=10$ раз меньше ЭДС источника, величина I_0 в $k=5$ раз меньше тока короткого замыкания источника.

Оптика

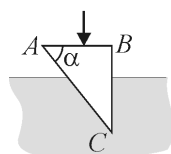


Рис. 18

П.26. Прямоугольный клин из оптического стекла с показателем преломления $n_{ст} = 1,7$ помещен в глицерин ($n_{гл} = 1,47$), как показано на рис. 18. При каких значениях угла α луч света, падающий перпендикулярно грани AB , выйдет в глицерин из грани AC ?

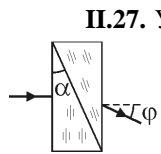


Рис. 19

П.27. Узкий пучок света падает нормально на поверхность плоскопараллельной пластины, склеенной из двух плотно прижатых клиньев с углом при вершине $\alpha = 4^\circ$ (рис. 20). Разность показателей преломления материалов клиньев $\Delta n = n_1 - n_2 = 0,3$. Под каким углом φ к первоначальному направлению выйдет пучок из пластины? При расчетах учесть, что для малых углов, заданных в радианной мере, справедливо приближенное равенство $\text{tg } \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$.

П.28. Точечный источник света расположен в воздухе практически вплотную к поверхности прозрачного шара. При этом все лучи от этого источника, попадающие внутрь шара, после выхода из него в воздух пересекаются с лучом, проходящим через центр шара. Что можно сказать о показателе преломления вещества этого шара?

П.29. Точечный источник света находится перед рассеивающей линзой. Луч от этого источника, падающий на линзу в точке O , идет после линзы вдоль ее главной оптической оси (рис. 20). Луч, падающий на линзу в точке A , выходит из линзы под углом $\alpha = 6^\circ$ к оптической оси. Модуль фокусного расстояния линзы $F = 25$ см. На каком расстоянии от линзы находится источник, если расстояние $|OA| = l = 2$ см?

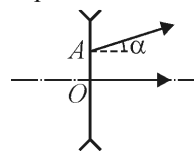


Рис. 20

П.30. Тонкая линза, используемая в качестве лупы, дает на поверхности стола четкое изображение нити лампы, висящей под высоким потолком комнаты, если линза находится на расстоянии $l = 6$ см от стола. С каким увеличением будет наблюдаться текст на лежащей на столе странице, если глаз наблюдателя будет находиться на расстоянии $L = 30$ см от рассматриваемого изображения?

П.31. В отверстие радиуса $R = 1,5$ см в тонкой непрозрачной ширме вставлена собирающая линза. Точечный источник света расположен на главной оптической оси линзы по одну сторону от перегородки. По другую сторону находится экран. Экран, соприкасающийся вначале с линзой, отодвигают от линзы. При этом радиус светлого пятна на экране плавно увеличивается и на расстоянии $L = 18$ см от перегородки достигает значения $r_1 = 3$ см. Если линзу убрать, оставив экран на месте, то радиус пятна на экране станет $r_2 = 4,5$ см. Определите фокусное расстояние линзы.

П.32. Тонкая плосковыпуклая линза немного погружена в воду своей горизонтальной плоской стороной (выпуклая поверхность линзы находится в воздухе). На линзу падает сверху узкий вертикальный пучок света, ось которого проходит точно через вершину выпуклой поверхности. Этот пучок фокусируется в воде на глубине $h = 27$ см. Оптическая сила линзы в воздухе $D = 5$ дптр. Найти показатель преломления воды.

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ – 2014/2015»

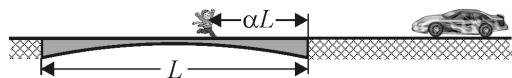
В 2014/2015 учебном году олимпиада «Ломоносов» по физике в МГУ проводилась в два этапа – отборочный и заключительный. Отборочный этап проходил в форме заочного испытания. На этом этапе каждый ученик 10-го – 11-го класса мог участвовать по собственному выбору в одном или двух турах, проводимых по единой форме и с равноценными заданиями. Задания олимпиады были размещены в Интернете на сайте <http://olymp.msu.ru>. Доступ к условиям заданий был открыт для участников дважды: с 17 по 20 ноября 2014 года (1-й тур) и с 15 по 18 декабря 2014 года (2-й тур). Прием решений и ответов по каждому из туров прекращался одновременно с их завершением. После прохождения всех туров олимпиады каждый участник с 26 по 27 декабря 2014 года должен был самостоятельно определить номер тура, который для него является официальным. Для учеников 7-х – 9-х классов отборочный этап проводился в один тур с 17 ноября по 27 декабря 2014 года.

Победители и призеры отборочного этапа были приглашены для участия в заключительном этапе олимпиады. Ниже приводятся примеры заданий для участников отборочного тура олимпиады Ломоносов.

I. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Задание для 7-х – 9-х классов

I.1. Когда мальчик прошел по мосту расстояние, составляющее



$\alpha = 0,25$ от полной длины моста, (рис. 21) он услышал сзади себя сигнал догоняющего его автомобиля,

Рис. 21

в котором ехал его отец. Желая поскорее увидеться с отцом, мальчик развернулся и побежал навстречу автомобилю, поравнявшись с ним у начала моста. Известно, что если бы мальчик побежал бы с той же скоростью не назад, а вперед, то автомобиль нагнал бы его у конца моста. Во сколько раз n скорость автомобиля больше скорости мальчика?

I.2. При отливке детали из меди внутри нее образовались пустоты. Определите отношение x объема пустот к объему детали, если плотность меди $\rho_1 = 8,96 \text{ г/см}^3$, а масса детали $M = 4254 \text{ кг}$. При погружении детали в ванну, заполненную водой с плотностью $\rho_2 = 1,00 \text{ г/см}^3$, деталь

вытеснила воду массой $m = 500$ кг. Ответ приведите в процентах с точностью до одного знака после запятой.

I.3. Желая угостить своих товарищей горячим чаем, школьник налил в кастрюлю $m = 600$ г воды и погрузил в воду электрический кипятильник мощностью $N = 500$ Вт. Когда прошло достаточно много времени, школьник обнаружил, что вода в кастрюле никак не закипит, и выключил кипятильник. Через какое время τ после этого температура воды в кастрюле понизится на $\Delta t = 1$ °С? Удельная теплоемкость воды $c = 4,2$ Дж/(г·°С). Теплоемкостью кастрюли можно пренебречь. Ответ приведите в секундах, округлив до одного знака после запятой.

I.4. При скорости автомобиля $v_1 = 72$ км/ч расход бензина составляет $m_1 = 80$ г на $s = 1$ км пути. Какую мощность N разовьёт двигатель этого автомобиля при скорости $v_2 = 108$ км/ч? Считайте, что сила сопротивления движению автомобиля пропорциональна его скорости. Коэффициент полезного действия двигателя $\eta = 30\%$. Удельная теплота сгорания бензина $q = 44$ МДж/кг. Ответ приведите в киловаттах, округлив до одного знака после запятой.

I.5. Четыре одинаковых резистора соединены в цепь, схема которой изображена на рис. 22 сплошными линиями, причем сопротивление между клеммами A и B равно $R = 15$ Ом. Чему станет равным сопротивление R' между клеммами A и B , если проводник, соединяющий точки E и F , разрезать и подключить в образовавшийся разрыв цепи еще один такой же резистор, как показано на рисунке штриховыми линиями? Ответ приведите с точностью до целых.

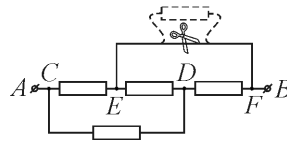


Рис. 22

I.6. На уроке по геометрической оптике учитель собрал на оптической скамье установку, состоящую из тонкой линзы L , плоского зеркала $З$, тонкой светящейся палочки $П$ и экрана $Э$, которые расположил перпендикулярно главной оптической оси линзы (см. рис. 23). Учитель закрепил палочку на расстоянии $a = 12$ см от линзы. Затем он попросил ученика A установить экран так, чтобы на нем обра-

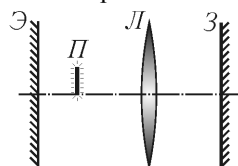


Рис. 23

зовалось изображение палочки, и, перемещая зеркало вдоль главной оптической оси линзы, исследовать, как зависит размер изображения от положения зеркала. Проведя опыт, ученик *A* сообщил, что при перемещении зеркала изображение палочки не изменяется. После этого ученик *B* получил задание прижать зеркало вплотную к линзе и установить палочку и экран так, чтобы размер изображения стал вдвое больше, чем в первом опыте. На какое расстояние b пришлось передвинуть ученику *B* палочку от первоначального положения, чтобы выполнить задание учителя? Ответ приведите в сантиметрах, округлив до двух знаков после запятой.

Задание для 10-х – 11-х классов

Первый тур

I.7. На гладкой горизонтальной плоскости лежит деревянный брусок массой $M = 990$ г, прикрепленный к вертикальной стенке пружиной жесткостью $k = 100$ Н/м. (рис. 24) В центр бруска попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально и параллельно оси пружины, и застревает в нем. Определите скорость пули v , если максимальное сжатие пружины после удара составило $\Delta l = 15$ см.

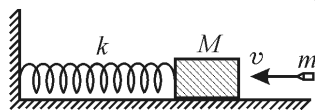


Рис. 24

I.8. Из некоторой точки *A* брошено тело под углом к горизонту. Через время $\tau = 2$ с оно достигло точки *B*, в которой вектор его скорости оказался перпендикулярным вектору начальной скорости тела. Найдите расстояние *AB* между точками *A* и *B*. Сопротивление воздуха можно не учитывать. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с². Ответ округлите до одного знака после запятой.

I.9. Над некоторым количеством водорода, помещенного в замкнутый сосуд, провели два эксперимента. В первом эксперименте водород находился при комнатной температуре, при которой его можно считать идеальным двухатомным газом. Для изохорного нагревания водорода на один градус в этих условиях пришлось затратить количество теплоты $Q = 10$ Дж. Во втором эксперименте температуру водорода предварительно существенно увеличили, в результате чего часть молекул водорода диссоциировала на атомы. При этом оказалось, что для

изохорного нагревания водорода на один градус нужно затратить количество теплоты $Q_1 = 11$ Дж. Какое количество теплоты Q_2 пришлось бы затратить для изобарного нагревания водорода на один градус во втором эксперименте? Водород в условиях проведенных экспериментов можно считать идеальным газом.

Указание. Среднюю кинетическую энергию молекулы двухатомного газа, имеющего температуру T , примите равной $\bar{E} = \frac{5}{2}kT$, где k – постоянная Больцмана.

I.10. Параллельные металлические рельсы закреплены на неподвижном горизонтальном столе и замкнуты на резистор. На рельсах лежит металлический стержень, расположенный перпендикулярно к ним. К середине стержня привязана нить, перекинутая через блок и соединенная с грузом массой $M = 1$ кг (см. рис. 25). Вся система находится в магнитном поле, вектор индукции которого направлен вертикально вверх. Когда груз отпустили, через некоторое время движение стержня установилось, т.е. стало равномерным. Чему равен модуль $v_{\text{уст}}$ скорости установившегося движения стержня, если в резисторе при этом выделяется мощность $N = 15$ Вт? Трением, а также сопротивлением стержня и рельс можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с². Ответ округлите до одного знака после запятой.

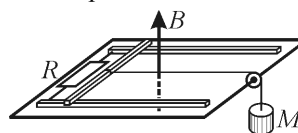


Рис. 25

I.11. На левую грань равнобедренной стеклянной призмы падает по нормали к ней параллельный пучок света шириной $a = 1$ см (см. рис. 26), причем после прохождения левой грани пучок целиком попадает на правую грань призмы. Найдите ширину b пучка, выходящего из призмы, если угол при вершине призмы равен 45° , а показатель преломления стекла $n = 1,85$. Ответ приведите в миллиметрах, округлив до одного знака после запятой.

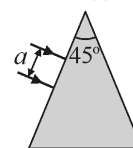


Рис. 26

Второй тур

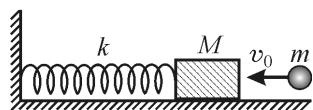


Рис. 27

I.12. На гладком столе покоится брусок массой $M = 20$ г, прикрепленный пружиной жесткостью $k = 50$ Н/м к неподвижной стене (рис. 27). В брусок ударяется шарик массой $m = 10$ г, летящий со скоростью $v_0 = 30$ м/с, направленной горизонтально вдоль оси пружины. Считая соударение шарика и бруска абсолютно упругим, найдите максимальное сжатие Δl пружины после удара. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до десятых.

I.13. Два небольших одинаковых шарика подвешены на легких нерастяжимых нитях длиной $l = 0,5$ м каждая. Расстояние между точками подвеса нитей $L = 1,8$ м. Под шариками на расстоянии $H = 0,5$ м от них находится тяжелая горизонтальная плита. Нить левого шарика отклоняют от вертикального положения влево на некоторый угол и отпускают без толчка. В момент прохождения шариком положения равновесия нить обрывается, после чего шарик падает на плиту и отскакивает от неё. На какой угол α следует отклонить нить, чтобы левый шарик после абсолютно упругого соударения с плитой попал точно в правый шарик? Сопротивлением воздуха можно пренебречь. В качестве ответа приведите значение $\cos \alpha$, округлив его до двух знаков после запятой.

I.14. В теплоизолированном достаточно длинном цилиндрическом сосуде, открытом сверху и стоящем вертикально, на расстоянии $H = 10$ см от дна висит на нити поршень массой $m = 1$ кг. Под поршнем находится $\nu = 1$ моль одноатомного идеального газа. В начальный момент температура газа равна $T_0 = 300$ К, а его давление равно атмосферному давлению. Какое количество теплоты Q нужно медленно сообщить газу, чтобы поршень поднялся до высоты nH , где $n = 2$? Трением поршня о стенки цилиндра можно пренебречь. Универсальную газовую постоянную примите равной $R = 8,3$ Дж/(моль·К), а ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Ответ приведите в килоджоулях, округлив до одного знака после запятой.

I.15. В цепи, схема которой представлена на рис. 28, сопротивления резисторов $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 5 \text{ Ом}$, а внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало. Первоначально конденсатор C был достаточно долго подключен параллельно резистору R_1 . Затем этот конденсатор отсоединили от резистора R_1 , удалили резистор R_2 и включили конденсатор в образовавшийся разрыв цепи. Во сколько раз k изменилась спустя достаточно большое время после этого энергия электрического поля конденсатора? Ответ округлите до целых.

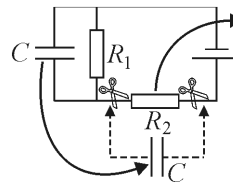


Рис. 28

I.16. Нижняя грань куба, изготовленного из стекла с показателем преломления $n_1 = 1,8$, расположена горизонтально и немного погружена в жидкость с показателем преломления $n_2 = 1,55$. На боковую грань куба в точке, находящейся в воздухе вблизи поверхности жидкости, под углом α падает световой луч, лежащий в вертикальной плоскости, перпендикулярной этой грани. При этом преломленный луч попадает на нижнюю грань кубика. Определите максимальное значение угла α , при котором преломленный луч испытает полное внутреннее отражение от границы раздела «стекло–жидкость». Ответ выразите в градусах, округлив до целых.

II. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Проведение заключительного этапа олимпиады «Ломоносов» было назначено на 27 февраля 2015 года. Для учащихся всех классов этот этап проводился в очной форме на физическом факультете МГУ и на 7 региональных площадках в городах Барнаул, Воронеж, Кисловодск, Саров, Уфа, Чебоксары и Челябинск. Кроме того, по желанию ряда учеников 7-х – 9-х классов выполнение заданий заключительного этапа было организовано в школах по месту их проживания.

Задания для учащихся 10-х – 11-х классов были составлены в полном соответствии с Кодификатором элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для единого государственного экзамена 2015 года по физике и охватывали основные разделы Кодификатора, а именно, 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. Типовое задание состояло из четырех различных разделов, состоящих из кратких вопросов по теории и дополняющих их задач. В первом разделе были помещены задания по механике, во втором разделе – задания по молекулярной физике и термодинамике, в третьем разделе – задания по электродинамике, в четвертом разделе – задания по оптике

Ниже приводятся задания заключительного этапа олимпиады «Ломоносов – 2014/2015»

Задание для 7-х – 9-х классов

II.1. Школьники собрались на экскурсию в музей, находящийся в соседнем городе. Тронувшись от школы в назначенное время, автобус со школьниками поехал с постоянной скоростью $v_1 = 72$ км/ч, рассчитанной так, чтобы прибыть к музею к началу экскурсии. По дороге пошел дождь и водитель был вынужден снизить скорость автобуса до $v_2 = 54$ км/ч. Когда дождь кончился, до пункта назначения осталось проехать расстояние $S = 30$ км. Чтобы наверстать упущенное время, водитель увеличил скорость автобуса до $v_3 = 90$ км/ч. В результате автобус прибыл к музею точно в запланированное время. Сколько времени τ шел дождь? Ответ приведите в минутах.

II.2. Для длительного хранения сжиженных газов обычно используют сосуды Дьюара, в которых постоянная температура поддерживается за счет хорошей теплоизоляции сосуда и свободного испарения жидкого газа при атмосферном давлении. В одном из таких сосудов при хранении $V = 2$ л жидкого азота при температуре $t_{\text{аз}} = -195$ °С за $\tau_{\text{аз}} = 24$ часа испарилась ровно половина этого количества азота. После этого жидкий азот удалили из сосуда и положили в сосуд кусочек льда массой $m = 40$ г при температуре 0 °С. Определите, через какое время $\tau_{\text{л}}$ лед полностью растает. Удельная теплота парообразования азота $r = 198$ кДж/кг, плотность жидкого азота $\rho = 0,8$ г/см³, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг. Температура окружающего воздуха $t_0 = 20$ °С. Считайте, что скорость поступления теплоты через стенки сосуда пропорциональна разности температур снаружи и внутри сосуда. Ответ приведите в часах, округлив до одного знака после запятой.

II.3. Две электроплитки при параллельном подключении к электрической сети выделяют суммарную мощность $N_1 = 900$ Вт, а при последовательном подключении к сети – суммарную мощность $N_2 = 200$ Вт. Пренебрегая зависимостью сопротивления плиток от температуры, найдите мощности N_{01} и N_{02} этих плиток по отдельности.

II.4. Мальчик M и девочка D стоят в комнате, вид сверху на которую показан на рис. 29. На стене, противоположной первоначальному расположению мальчика, висит плоское зеркало с центром в точке O и шириной $2\Delta x$. В некоторый момент времени мальчик начал идти к зеркалу по прямой MO . Двигаясь равноускоренно, он набрал за время $t_0 = 1$ с скорость $v_0 = 1$ м/с, а затем шел с постоянной скоростью v_0 . Через какое время τ после начала движения мальчик увидел в зеркале изображение девочки, если шаг сетки с квадратными ячейками, нанесенной на полу комнаты, $\Delta x = 1$ м?

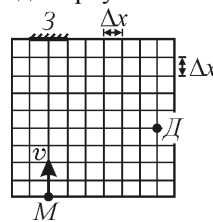


Рис. 29

Задание для 10-х – 11-х классов

II.5. Как определяется вектор перемещения материальной точки? Каковы его проекции на координатные оси?

Задача. Мальчик стреляет маленьким шариком из закрепленной игрушечной пушки, стараясь попасть в цель, находящуюся на расстоянии $L = 10$ м по горизонтали от пушки и на некоторой высоте выше нее, причем шарик вылетает из ствола пушки с фиксированной начальной скоростью. Мальчик экспериментально определил, что попасть в цель можно, установив ствол пушки под единственно возможным углом $\alpha_0 = 67,5^\circ$ к горизонту. На какой высоте H находится цель? Сопrotивлением воздуха и размерами пушки можно пренебречь. Ответ приведите в метрах, округлив до целых.

II.6. Сформулируйте основные положения молекулярно-кинетической теории. Каковы по порядку величины масса и размеры молекул?

Задача. Гладкий поршень делит на две части закрытый с двух сторон цилиндр, лежащий горизонтально (рис. 30). В левой части цилиндра находится идеальный одноатомный газ, а в правой – вакуум и упирающаяся в поршень пружина, причем ее длина в недеформированном состоянии равна расстоянию между внутренними сторонами торцевых стенок цилиндра за вычетом толщины поршня. В начальном состоянии объем газа равен $V_1 = 1$ л, а давление равно $p_1 = 10^5$ Па. Определите количество теплоты

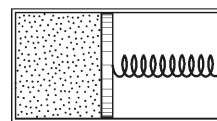


Рис. 30

Q , которое нужно передать газу, чтобы его объём увеличился в $n = 2$ раза.

II.7. Дайте определение напряженности электрического поля. Сформулируйте принцип суперпозиции электрических полей.

Задача. Две тонкие непроводящие плиты большого размера расположены вертикально и закреплены параллельно друг другу. Верхняя часть боковых сторон плит, обращенных друг к другу, гладкая, а нижняя – шероховатая. Стороны плит, обращенные друг к другу, равномерно заряжены равными по модулю и противоположными по знаку зарядами с поверхностной плотностью $\sigma = \pm 60$ мкКл/м². В зазор между плитами помещена равномерно заряженная диэлектрическая пластинка массой $m = 50$ г и длиной $b = 10$ см, несущая заряд $q = 0,3$ мкКл. Толщина пластинки чуть меньше ширины зазора между плитами. Пластинку отпускают без начальной скорости из положения, при котором ее нижний край находится на границе шероховатой части плит (см. рис. 31).

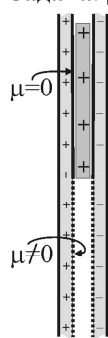


Рис. 31

С какой скоростью v будет двигаться пластинка в тот момент, когда она окажется целиком между шероховатой частью боковых плит? Коэффициент трения между пластинкой и плитами в их шероховатой части $\mu = 0,25$. Электрическую постоянную примите равной $\epsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, а ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Поляризационными эффектами можно пренебречь.

II.8. Какие линзы называются тонкими? Дайте определения фокусного расстояния и оптической силы тонкой линзы.

Задача. Тонкая собирающая плосковыпуклая линза с радиусом кривизны сферической поверхности R изготовлена из стекла с абсолютным показателем преломления n и размещена в воздухе так, что её плоская поверхность параллельна экрану, находящемуся от неё на расстоянии L . На сферическую поверхность линзы падает узкий параллельный пучок света, ось симметрии которого совпадает с главной оптической осью линзы. Определите абсолютный показатель преломления n_1 прозрачного вещества, которым следует заполнить пространство между линзой и экраном, чтобы диаметр светлого пятна от прошедшего через линзу света на экране не изменился.

ПРОФИЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН 2015

В 2015 профильный экзамен (дополнительное вступительное испытание) по физике в МГУ и в его Севастопольском филиале проводился в письменной форме. Типовое задание для абитуриента охватывало все основные разделы программы по физике для поступающих в МГУ: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. По каждому разделу программы абитуриенту предлагались краткий вопрос по теории и дополняющая его задача. На выполнение всего задания отводилось четыре астрономических часа. Ниже приводятся примеры заданий профильного экзамена.

I. Механика

I.1. Сформулируйте второй и третий законы Ньютона.

Задача. На гранях закрепленной призмы находятся два груза массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг, соединенные друг с другом и неподвижной опорой невесомыми и нерастяжимыми нитями через систему невесомых блоков (см. рис. 32). Правая грань призмы гладкая, левая – шероховатая с коэффициентом трения $\mu = 0,6$. Определите модуль ускорения левого груза a_1 . Углы при основании призмы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

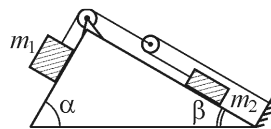


Рис. 32

I.2 Запишите связь между приращением импульса материальной точки и импульсом силы. Сформулируйте закон сохранения импульса.

Задача. На горизонтальной поверхности стола лежит доска массой $M = 0,5$ кг, а на доске сидит лягушка массой $m = 50$ г. В некоторый момент времени лягушка совершает прыжок, отталкиваясь от доски, и приобретает скорость $v = 1$ м/с, направленную под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Считая, что длительность толчка лягушки о доску равна $\tau = 0,1$ с, а сила, действующая на лягушку во время толчка, практически постоянна, определите, при каких значениях коэффициента трения μ доски о стол, доска в момент толчка будет оставаться неподвижной. Модуль ускорения свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

I.3. Дайте определение механической работы. Как связано приращение кинетической энергии тела с работой приложенных к телу сил?

Задача. По горизонтальному столу скользит слева направо тонкая однородная линейка длиной $l = 20$ см. Поверхность стола состоит из двух панелей, обработанных с различным качеством. Коэффициент

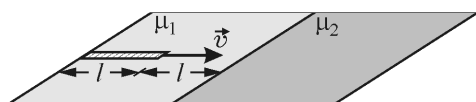


Рис. 33

трения между линейкой и левой панелью равен μ_1 , а между линейкой и правой панелью – μ_2 (см. рис. 33). В тот момент, когда расстояние от правого конца линейки до линии соприкосновения (стыка) панелей равно l , модуль скорости линейки $v = 1$ м/с. При каком максимальном значении коэффициента трения $\mu_2 = \mu_{2\max}$ линейка может полностью попасть на правую панель, если коэффициент трения $\mu_1 = 0,05$, а вектор скорости линейки направлен перпендикулярно стыку панелей? Модуль ускорения свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

Решение задачи требует анализа сил трения и кинематики. В момент, когда правый конец линейки находится на расстоянии l от стыка, левая часть линейки находится на панели с коэффициентом трения μ_1 , а правая часть – на панели с коэффициентом трения μ_2 . Скорость линейки направлена перпендикулярно стыку. Ускорение линейки будет направлено влево, так как сила трения на правой панели будет больше, чем на левой. Модуль ускорения будет зависеть от разности сил трения и массы линейки.

II. Молекулярная физика и термодинамика

II.1. Что такое идеальный газ? Запишите основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа и укажите смысл входящих в это уравнение величин.

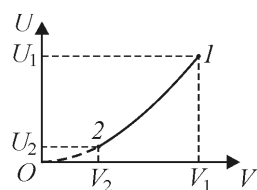


Рис. 34

Задача. Какую работу A надо совершить для сжатия некоторого количества идеального одноатомного газа в $k = 3$ раза, если внутренняя энергия газа U меняется при этом так, как показано на рис. 34? Участок $1-2$ – отрезок параболы с вершиной в начале координат. Исходное значение внутренней энергии газа равно $U_1 = 135$ кДж.

II.2. Какие виды парообразования вы знаете? Дайте определение удельной теплоты парообразования.

Задача. В цилиндре под поршнем при температуре 20°C находятся воздух, водяные пары и вода. Число молей воздуха равно числу молей пара, а масса воды в три раза больше массы пара. Объем смеси медлен-

но увеличивают при постоянной температуре до тех пор, пока относительная влажность воздуха не уменьшится до 50%. Определите конечное давление влажного воздуха p , если давление насыщенного пара при 20°C равно $p_{\text{нас}} = 2,33$ кПа.

III.3. Что такое насыщенный пар? Как зависят давление и плотность насыщенного пара от температуры?

Задача. Герметично закрытый сосуд объемом $V = 2$ л находится при температуре $t_1 = 36^\circ\text{C}$. При этом половину сосуда занимает вода, а другую половину – насыщенный водяной пар. На какую величину ΔN увеличится число молекул водяного пара в сосуде при его нагревании до температуры $t_0 = 100^\circ\text{C}$? Давление насыщенного водяного пара при температуре 36°C составляет $p_{\text{нас}} = 5,9$ кПа. Нормальное атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа. Изменением объема воды за счет изменения ее плотности и частичного испарения можно пренебречь. Постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

III. Электродинамика

III.1. Что такое потенциал электростатического поля? Как связана разность потенциалов с напряженностью однородного электростатического поля?

Задача. Конденсатор емкостью $C_1 = 10$ мкФ зарядили от источника постоянного напряжения с ЭДС \mathcal{E} . Отключив конденсатор от источника, его соединили с незаряженным конденсатором емкостью $C_2 = 2C_1$. После установления напряжения на конденсаторах их обкладки замкнули проводником с достаточно большим сопротивлением, в котором выделилось количество теплоты $Q = 0,3$ Дж. Определите ЭДС источника \mathcal{E} .

III.2. Дайте определение электроемкости. Запишите формулу для электроемкости плоского конденсатора.

Задача. В приведенной на рис. 35 схеме электроёмкость конденсатора $C = 6$ мкФ, ЭДС источника $\mathcal{E} = 5$ В, а ключ K замкнут. Какое максимальное количество теплоты Q может выделиться на

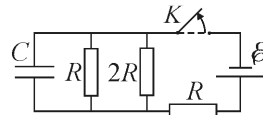


Рис. 35

Условия задач

резисторе $2R$ после размыкания ключа? Внутреннее сопротивление источника считайте пренебрежимо малым.

III.3. Чему равна работа электрического тока? Сформулируйте закон Джоуля–Ленца.

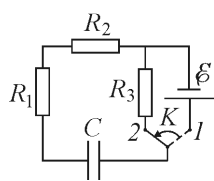


Рис. 36

Задача. В цепи, схема которой изображена на рис. 36, ключ K сначала достаточно долго удерживали в положении 1. Затем ключ перевели в положение 2. Известно, что после этого на сопротивлении R_1 выделилось количество теплоты $Q_1 = 1$ мДж. Определите ЭДС \mathcal{E} источника. При расчетах примите $R_1 = 100$ Ом; $R_2 = 200$ Ом; $R_3 = 300$ Ом; $C = 120$ мкФ.

IV. Оптика

IV.1. Сформулируйте законы отражения света. Приведите пример построения изображения предмета в плоском зеркале.

Задача. Параллельный пучок света падает по нормали на грань стеклянной призмы. Угол при вершине призмы равен $\alpha = 0,1$ рад, показатель преломления стекла $n = 1,5$. За призмой установлена тонкая собирающая линза L с фокусным расстоянием $F = 1$ м так, что главная оптическая ось линзы перпендикулярна входной грани призмы (см. рис. 37). На каком расстоянии x от главной оптической оси линзы будет сфокусирован световой пучок, преломленный призмой?

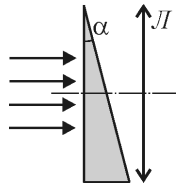


Рис. 37

Указание. Для упрощения расчетов воспользуйтесь приближенной формулой $\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x$, справедливой для малых значений аргумента x , заданного в радианах.

IV.2. Запишите формулу линзы и поясните смысл входящих в нее величин. Чему равно увеличение, даваемое линзой?

Задача. Действительное изображение предмета, находящегося на расстоянии $a = 8$ см от тонкой собирающей линзы, получается с некоторым увеличением. После перемещения линзы вдоль ее главной оптической

оси на расстояние $l = 4$ см линза дает мнимое изображение предмета с таким же увеличением. Определите фокусное расстояние линзы F .

IV.3. Какие линзы называют тонкими? Дайте определения фокусного расстояния и оптической силы тонкой линзы.

Задача. Две тонкие линзы с одинаковыми по модулю фокусными расстояниями расположены так, что их главные оптические оси совпадают. Первая линза является рассеивающей, а вторая – собирающей. Расстояние между линзами равно модулю их фокусного расстояния. Предмет расположен перпендикулярно главной оптической оси перед рассеивающей линзой в ее левом фокусе. Определите увеличение Γ , даваемое этой системой линз.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ – 2015»

I. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Задания для 7-х – 9-х классов

1.1. Ножницами можно вырезать из листа полоски шириной в одну-две-три клетки. Если складывать полоски по «гармошкой», а затем с помощью планок плотно прижимать «гармошки» друг к другу, то расстояние между планками будет соответствовать толщине большого числа листов бумаги. Можно добиться того, чтобы это расстояние оказалось равно стороне одной клетки листа, который используется еще и как линейка – длина этой стороны примерно 5 мм. Источники ошибки – отличие длины стороны от 5 мм (допускается оценка участником возможного разброса без специального основания) и разброс количества слоев бумаги в 5 мм. Лучше всего поставить эксперимент с «прижатием» хотя бы три – пять раз. «Реалистичные» значения: сторона клетки $a = (5 \pm 0,2)$ мм, количество «слоев» в 5 мм варьируется на 4 – 8 от измерения к измерению (при достаточно качественном прижатии). Конкретное количество слоев зависит от сорта бумаги – в изученных образцах оно колебалось от 80 до 100. Например: если $a = (5 \pm 0,1)$ мм, а $N = (94 \pm 3)$, то толщина листа $d = \frac{a}{N} \approx 0,0532$ мм. Ошибку измерения можно оценить, обратив внимание, что $\frac{0,1}{5} = 0,02$ и $\frac{3}{94} \approx 0,03$, так что суммарная ошибка не превышает 5%: $d = (0,053 \pm 0,003)$ мм. На самом деле, с учетом законов статистики, стандартное отклонение $\frac{\Delta d}{d} \approx 0,036$, и реально точность даже несколько выше: $d = (0,053 \pm 0,002)$ мм, но на уровне требований школьной программы оба подхода следует считать правильными.

Ответ: $d = (0,053 \pm 0,002)$ мм.

I.2. Вычислим время «погони» для Петра. Оно состоит из времени подъема по своему эскалатору $t_1 = \frac{L}{2(v_1 + u)}$ (здесь L – длина эскалатора, а u – скорость его движения) и времени спуска t_2 по встречному эскалатору до портфелей. Поскольку за время подъема Петра портфели удалились от верха эскалатора на расстояние $s = ut_1 = \frac{uL}{2(v_1 + u)}$, а Петр догоняет портфели со скоростью v_2 , то $t_2 = \frac{1}{v_2} \left[\frac{L}{2} + s \right] = \frac{L(v_1 + 2u)}{2v_2(v_1 + u)}$. Полное время погони Петра $t_{\text{П}} = t_1 + t_2 = \frac{L(v_1 + v_2 + 2u)}{2v_2(v_1 + u)}$. Аналогично вычисляется и время погони для Василия. Имеем $t'_1 = \frac{L}{2(v_2 - u)}$, $s' = ut'_1 = \frac{uL}{2(v_2 - u)}$, $t'_2 = \frac{1}{v_1} \left[\frac{L}{2} - s' \right] = \frac{L(v_2 - 2u)}{2v_1(v_2 - u)}$. Следовательно, полное время, затраченное Василием, $t_{\text{В}} = t'_1 + t'_2 = \frac{L(v_1 + v_2 - 2u)}{2v_1(v_2 - u)}$. Мальчики добегут до портфелей одновременно, если $t_{\text{П}} = t_{\text{В}}$, или $\frac{(v_1 + v_2 + 2u)}{v_2(v_1 + u)} = \frac{(v_1 + v_2 - 2u)}{v_1(v_2 - u)}$. Это соотношение приводится к удобному для анализа виду: $u(v_2 - v_1)(v_2 - v_1 - 2u) = 0$. По условию $u \neq 0$, поэтому возможные соотношения между скоростями, обеспечивающие одновременность встречи – это $v_2 = v_1$ и $v_2 = v_1 + 2u$. Для того, чтобы встреча произошла на эскалаторе, необходимо, чтобы Василий достиг нижней точки своего эскалатора раньше, чем портфели доедут до нижней точки своего, т.е. при $v_2 - u > u$, или $v_2 > 2u$. Поскольку по условию $v_1 > 0$, то при $v_2 = v_1 + 2u$ это требование выполнено, а при $v_2 = v_1$ оно ограничивает возможные значения скоростей.

Ответ: $v_2 = v_1 > 2u$, или $v_2 = v_1 + 2u$.

I.3. Поскольку в начальном состоянии находились в равновесии вода и лед, то начальная температура была равна $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Когда температура достигла $t_1 = 100^\circ\text{C}$, часть воды уже испарилась, и давление на поршень создавал насыщенный водяной пар, давление которого при этой температуре равно $p_1 \approx 101 \text{ кПа}$. Это давление было немного больше внешней нагрузки (веса груза и внешнего давления), и поршень (как сказано в условии) поехал вверх. В процессе подъема поршня давление (а значит, и температура) вплоть до полного испарения жидкости поддерживалось неизменным. Если пренебречь объемом воды и льда по сравнению с объемом образовавшегося пара, то высота подъема поршня $h \approx \frac{V_{\text{пара}}}{S} = \frac{m}{\rho S}$, где S – площадь сечения трубы, а m – общая масса воды под поршнем. Следовательно, работа пара над поршнем в процессе подъема $A = p_1 S \cdot h = \frac{m p_1}{\rho}$. Количество теплоты, сообщенное воде от

нагревателя, состоит из теплоты плавления льда $Q_1 = \frac{m}{2} \lambda$, теплоты нагревания воды $Q_2 = cm(t_1 - t_0)$ и теплоты испарения воды $Q_3 = mr$. Поэтому $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = m \left[\frac{\lambda}{2} + c(t_1 - t_0) + r \right]$. Следовательно, КПД подъемника: $\eta = \frac{A}{Q} = \frac{2 p_1}{\rho [\lambda + 2c(t_1 - t_0) + 2r]}$.

Ответ: $\eta = \frac{2 p_1}{\rho [\lambda + 2c(t_1 - t_0) + 2r]} \cdot 100\% \approx 5,6\%$.

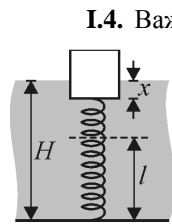


Рис. 38

I.4. Важно проследить, что будет происходить с кубом при постепенном повышении уровня воды. Сначала, при достаточно низком уровне воды, куб будет лежать на дне. В этом случае под водой будет находиться часть объема куба, соответствующая глубине слоя воды, т.е. $\frac{V_{\text{п}}}{V} = \frac{a^2 H}{a^3} = \frac{H}{a}$. Отрыв куба от дна бассейна произойдет, когда величина силы Архимеда сравняется с вели-

чиной действующей на куб силы тяжести: $F_A = mg$, или $\rho a^2 H g = \frac{\rho}{5} a^3 g$, откуда $H_1 = \frac{a}{5}$. Таким образом, при $H > \frac{a}{5}$ куб оторвется от дна и будет всплывать вместе с подъемом уровня жидкости. Пока пружина не натянется, будет поддерживаться равновесие силы Архимеда и силы тяжести, поэтому глубина погружения куба будет оставаться неизменной, и $\frac{V_n}{V} = \frac{1}{5}$. Пружина натянется, когда высота уровня сравняется с суммой $l = 4a$ и глубины погружения, то есть при $H_2 = \frac{21}{5}a$. Далее условие равновесия сил принимает вид:

$F_A = mg + k\Delta l$, или $\rho a^2 x g = \frac{\rho}{5} a^3 g + k(H - 4a - x)$, где x – глубина погружения куба, а k – коэффициент жесткости пружины, удлинение которой $\Delta l = H - l - x = H - 4a - x$. Поскольку, согласно условию, $k \frac{a}{4} = mg = \frac{\rho}{5} a^3 g$, то $k = \frac{4}{5} \rho a^2 g$, поэтому справедливо уравнение $x = \frac{a}{5} + \frac{4}{5}(H - 4a - x)$, откуда $x = \frac{4H - 15a}{9}$ и $\frac{V_n}{V} = \frac{4H}{9a} - \frac{5}{3}$. По смыслу этой величины она не может быть больше единицы. Следовательно, эта формула применима только до уровня, при котором $\frac{4H}{9a} - \frac{5}{3} = 1$, откуда $H_3 = 6a$. При более высоком уровне воды пружина уже целиком удерживает куб под водой. Объединяя все результаты, получаем ответ.

$$\text{Ответ: } \frac{V_n}{V} = \begin{cases} \frac{H}{a}, & \text{при } H \leq \frac{a}{5}; \\ \frac{1}{5}, & \text{при } \frac{a}{5} < H \leq \frac{21a}{5}; \\ \frac{4H}{9a} - \frac{5}{3}, & \text{при } \frac{21a}{5} < H \leq 6a; \\ 1, & \text{при } H > 6a. \end{cases}$$

Задания для 10-х –11-х классов

1.5. Из условия задачи ясно, что на экране получено действительное изображение зрачка светодиода. Следовательно, использовалась собирающая линза. Отношение поперечного размера изображения к поперечному размеру предмета (поперечное увеличение изображения Γ) связано с расстояниями от предмета до линзы a и от линзы до изображения b соотношением $\Gamma = \frac{d_1}{d} = \frac{b}{a}$. С

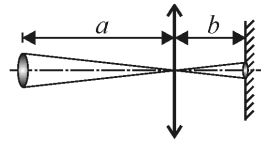


Рис. 39

другой стороны, по формуле тонкой линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$, откуда $\frac{d_1}{d} = \frac{F}{a-F}$. Из этого соотношения выражаем фокусное расстояние F линзы в воздухе: $F = \frac{ad_1}{d+d_1}$. Аналогичные рассуж-

дения приводят нас к выражению для фокусного расстояния F' линзы в жидкости: $F' = \frac{ad_2}{d+d_2}$. Оптическая сила линзы $D = \frac{1}{F}$ пропорциональна отличию от единицы коэффициента преломления линзы относительно среды, поэтому: $\frac{D'}{D} = \frac{F}{F'} = \frac{n-n_0}{n_0(n-1)} = \frac{d_1(d+d_2)}{d_2(d+d_1)}$. Из последнего

уравнения легко выражается $n_0 = \frac{d_2(d+d_1)}{d_2(d+d_1) + (n-1)d_1(d+d_2)} n$.

Ответ: $n_0 = \frac{d_2(d+d_1)}{d_2(d+d_1) + (n-1)d_1(d+d_2)} n = 1,4$.

1.6. Пусть емкость воздушного конденсатора равна C_0 . Тогда его начальный заряд $q_0 = C_0 U_0$. У конденсатора, заполненного диэлектриком, связь заряда с напряжением нелинейная:

$$q = C(U)U = \frac{\epsilon_0 \epsilon(U)S}{d} U = \frac{3}{2} C_0 \left(1 + \frac{U}{U_0} \right) U. \quad \text{Здесь учтено, что}$$

$\frac{E}{E_0} = \frac{Ed}{E_0 d} = \frac{U}{U_0}$. За достаточно большое время после соединения на-пряжения на конденсаторах практически выровняются. Если заряд за-

полненного конденсатора при этом равен q , то заряд воздушного равен $q' = C_0 U_0 - q$, поэтому $U = \frac{q'}{C_0} = U_0 - \frac{q(U)}{C_0} = U_0 - \frac{3}{2} U \left(1 + \frac{U}{U_0}\right)$. Отсюда получаем квадратное уравнение относительно $\frac{U}{U_0}$, а именно $\left(\frac{U}{U_0}\right)^2 + \frac{5}{3} \cdot \frac{U}{U_0} - \frac{2}{3} = 0$. Ясно, что физический смысл имеет положительный корень этого уравнения $\frac{U}{U_0} = \frac{1}{3}$, откуда $q' = \frac{1}{3} C_0 U_0$. Отметим, что отрицательный корень $\frac{U}{U_0} = -2$ соответствует случаю, когда конденсатор в процессе разрядки изменяет полярность пластин, и к тому же явно не согласуется с законом сохранения энергии. Значит, $\frac{q'}{q_0} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $n = 3$.

1.7. Давление аргона на поверхность планеты определяется его весом, и поэтому является постоянным: $p_0 = \frac{mg}{S}$ (здесь m – масса аргона, g – ускорение свободного падения вблизи поверхности планеты, S – площадь поверхности). Согласно условию, это давление $p_0 = \phi_0 \cdot p_n(T_0)$, где $p_n(T_0)$ – давление насыщенного пара аргона при начальной температуре. Для гелия указанные в условии температуры существенно выше критической, и он не конденсируется. Поэтому парциальное давление гелия просто добавляется к p_0 , не влияя на начало конденсации аргона при охлаждении поверхности до температуры T_1 , которая определяется из условия $p_0 = p_n(T_1)$. Запишем линейную зависимость давления насыщенных паров аргона от температуры в виде: $p_n(T) = \alpha + \beta T$. Из системы уравнений $p_0 = \phi_0(\alpha + \beta T_0)$, $p_0 = \alpha + \beta T_1$ находим, что $\alpha = \frac{p_0}{\phi_0} \left[1 - \frac{1 - \phi_0}{x_1}\right]$, $\beta = \frac{p_0}{\phi_0} \frac{1 - \phi_0}{x_1 T_0}$. Следовательно,

$$p_n(T) = \frac{p_0}{\phi_0 x_1} \left[\phi_0 + x_1 - 1 + (1 - \phi_0) \frac{T}{T_0} \right].$$

После начала конденсации давление аргона на поверхность планеты остается прежним, но теперь оно складывается из давления слоя жидкого аргона глубиной h , которое равно $p_{\text{ж}} = \rho g h$ (ρ – плотность жидкого аргона, растворением гелия в жидком аргоне пренебрегаем) и давления насыщенных аргоновых паров над поверхностью планеты при новой температуре. Таким образом,

$$p_0 = \rho g h + \frac{p_0}{\phi_0 x_1} \left[\phi_0 + x_1 - 1 + (1 - \phi_0) \frac{T}{T_0} \right] = \rho g h + \frac{p_0}{\phi_0 x_1} [x_1 - (1 - \phi_0)x],$$

где через $x = \frac{T_0 - T}{T_0}$ обозначено относительное уменьшение температуры.

Из этого уравнения находим, что $h(x) = \frac{p_0}{\rho g} \frac{1 - \phi_0}{\phi_0} \left(\frac{x}{x_1} - 1 \right)$. Как видно,

при дальнейшем понижении температуры, т.е. при $x > x_1$ глубина океана

растет по линейному закону. Заметим также, что $\frac{p_0}{\rho g} = \frac{m}{\rho S} = h_{\text{max}}$

как раз и есть максимальная глубина аргонового океана, достигаемая в тот момент, когда весь аргон сконденсируется, и

$h(x) = h_{\text{max}} \frac{1 - \phi_0}{\phi_0} \left(\frac{x}{x_1} - 1 \right)$. Глубина океана равна половине максимальной

при $\frac{1 - \phi_0}{\phi_0} \left(\frac{x}{x_1} - 1 \right) = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{2 - \phi_0}{2(1 - \phi_0)} x_1 \equiv x_2$. Соответственно

для достижения этой глубины нужно понизить температуру еще на

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{\phi_0}{2(1 - \phi_0)} x_1 = 0,6\% .$$

Ответ: $h(x) = h_{\text{max}} \frac{1 - \phi_0}{\phi_0} \left(\frac{x}{x_1} - 1 \right)$, где $x = \frac{T_0 - T}{T_0}$; для достижения

глубины океана, равной половине максимальной, нужно понизить температуру

еще на $\Delta x = \frac{\phi_0}{2(1 - \phi_0)} x_1 = 0,6\%$ от первоначальной.

Примечания.

1. Использование условия постоянства давления, равного $p_0 = \frac{mg}{S}$, очень важно, поскольку в условии сказано, что линейная зависимость для $p_n(T)$ может быть использована только «в рассматриваемом диапазоне температур», то есть на интервале $[T_2, T_0]$. Поэтому ее продолжение до температуры T_3 , определяемой по пересечению прямолинейного графика с осью температур, а именно $T_3 = \frac{-\alpha}{\beta}$, недопустимо. Ясно, что такое «продолжение» графика нефизично, так как давление пара не может обращаться в нуль при ненулевой температуре. Таким образом, температура T_2 должна определяться именно из требования $m_c = \frac{m}{2}$, а не просто как $\frac{T_1 - \alpha/\beta}{2}$, несмотря на то, что в данном случае эти значения совпадают!
2. Использование предположения о «постоянстве объема атмосферы» не имеет под собой почвы ни с точки зрения условия задачи, ни с точки зрения законов физики. «Тонкая» атмосфера над поверхностью столь «идеальной» планеты может быть достаточно равномерно прогрета, т.е. можно считать, что в ее пределах не слишком сильно меняется абсолютная температура (тем более что на это есть явное указание в условии). Но при этом давление обязательно будет убывать с высотой, и определенной «верхней» границы у атмосферы вообще может не быть. Некоторые из участников даже использовали так называемую барометрическую формулу для описания зависимости давления от высоты. Но для решения это не нужно – достаточно понять, что в таких условиях конденсация всегда будет происходить в нижнем слое атмосферы, на границе с поверхностью планеты (в начале) или океана (затем). Тогда мы можем просто использовать, как это сделано в предложенном выше решении, условие, что при каждой температуре давление аргона над поверхностью океана равно давлению насыщенного пара.
3. Как известно, у аргона разница температур плавления и кипения очень мала – при давлениях, не слишком сильно отличающихся от нормального, она составляет примерно (3 – 4)% от температуры ки-

пения. Но это заметно больше, чем найденное Δx , так что замерзания аргона в опыте Трурля не происходило.

4. Некоторые участники, не обратив внимание на слово «еще» в условии, вместо Δx находили $x_2 = \frac{2-\phi_0}{2(1-\phi_0)} x_1 = 1,4\%$. В случае, если эта величина была четко определена в работе, такой ответ тоже считался правильным.

1.8. Из значений скорости и времени падения, которые заметно отличаются от $v_0 = \sqrt{2gh}$ и $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, очевидно, что падение действительно не является свободным – логично предположить наличие силы сопротивления воздуха. Так как шарик по условию маленький, будем считать архимедову силу пренебрежимо малой. Для описания силы сопротивления можно пробовать разные модели, но наиболее широко используются модели, в которых эта сила линейна или квадратична по скорости тела относительно воздуха. Для выбранной модели необходимо получить связь между измеренными величинами и сравнить ее предсказания с результатами измерений. Рассмотрим линейную модель, т.е. будем описывать силу сопротивления формулой $\vec{F}_c = -\alpha \vec{v}$, где \vec{v} – скорость шарика. Направим ось x вертикально вниз, совместив начало отсчета с начальной точкой падения шарика, и запишем уравнение движения в проекции на эту ось:

$$m \frac{dv_x}{dt} = mg - \alpha v_x, \text{ или } dv_x = g dt - \frac{\alpha}{m} v_x dt = g dt - \frac{\alpha}{m} dx.$$

Мы получаем соотношение между малыми изменениями скорости, времени и координаты. Просуммировав эти изменения от начала падения шарика до удара его о землю, получим: $\sum dv_x = v^* - 0 = v^*$, $\sum dt = t^*$, $\sum dx = h - 0 = h$. Таким образом, связь измеренных в эксперименте величин в рамках этой модели должна выглядеть так: $v^* = gt^* - \frac{\alpha}{m} h$. Проверку модели можно провести следующим образом:

если она справедлива, то величина $\frac{gt^* - v^*}{h} = \frac{\alpha}{m} = \text{const}$. Вычисленные

Олимпиада «Покори Воробьевы горы – 2015»

помощью таблицы MS Excel значения этой величины, представлены в таблице (см. первые четыре столбца).

H , м	v^* , м/с	t^* , с	α/m , с ⁻¹	v_T , м/с	Δv , м/с	h_T , м	Δh , м
1	4,21	0,463	0,3320	4,2092	0,0253	0,9995	0,0060
2	5,83	0,662	0,3321	5,8282	0,0350	2,0000	0,0120
3	7,03	0,818	0,3315	7,0245	0,0422	3,0033	0,0180
4	8	0,951	0,3323	7,9964	0,0480	4,0027	0,0240
5	8,84	1,07	0,3313	8,8303	0,0530	5,0042	0,0301
6	9,56	1,178	0,3327	9,5590	0,0574	5,9974	0,0360
7	10,22	1,279	0,3324	10,2172	0,0614	6,9963	0,0420
8	10,82	1,374	0,3324	10,8164	0,0650	7,9956	0,0480
9	11,37	1,465	0,3335	11,3729	0,0683	9,0053	0,0541
10	11,88	1,551	0,3335	11,8835	0,0714	10,0054	0,0601
11	12,35	1,633	0,3336	12,3569	0,0742	10,9994	0,0661
12	12,8	1,713	0,3337	12,8065	0,0769	12,0060	0,0721
13	13,22	1,79	0,3338	13,2281	0,0794	13,0084	0,0781
14	13,61	1,865	0,3347	13,6285	0,0819	14,0156	0,0842
15	13,98	1,938	0,3355	14,0087	0,0841	15,0244	0,0902

Как видно, разброс значений константы $\frac{\alpha}{m}$ получается заметно меньше 5% (и даже меньше 1%): взяв в качестве значения для этой величины среднее из полученных, находим, что $\frac{\alpha}{m} = (0,3330 \pm 0,0025) \text{ с}^{-1}$. Отметим, что эта точность лишь немногим хуже точности, с которой известны входящие в формулу для $\frac{\alpha}{m}$ величины. Таким образом, модель с линейной по скорости силой сопротивления воздуха описывает экспериментальные данные с требуемой точностью.

Более серьезную проверку для модели можно осуществить, если вычислить теоретические значения высоты и скорости падения по времени падения. Для этого необходимо выйти за рамки школьной программы. Прямой подстановкой можно убедиться, что из уравнения, описывающего зависимость скорости от времени, а именно

$\frac{dv_x}{dt} = g - \frac{\alpha}{m}v_x$, следует, что $v_x(t) = \frac{mg}{\alpha} + C \cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)$, где C – произвольная константа. Так как $v_x(0) = \frac{mg}{\alpha} + C = 0$, то $C = -\frac{mg}{\alpha}$, и поэтому в рамках принятой модели связь скорости и времени падения описывается формулой $v(t) = \frac{mg}{\alpha} \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)\right]$. Интегрирование этого выражения дает связь высоты с временем падения:

$$h(t) = \int_0^t v_x dt = \frac{m^2 g}{\alpha^2} \left[\frac{\alpha}{m} t + \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) - 1 \right].$$

найденное значение $\frac{\alpha}{m} = (0,3330 \pm 0,0025) \text{ с}^{-1}$ и заданное значение $g = (9,81 \pm 0,01) \text{ м/с}^2$, для каждого t^* находим v_t и h_t , а также возможный разброс их значений $v_t \pm \Delta v$, $h_t \pm \Delta h$ (5 – 8 столбцы таблицы). Как видно, все экспериментальные значения находятся внутри интервалов для теоретических значений, поэтому модель действительно описывает экспериментальные данные.

Чтобы записать выражение для силы сопротивления, нужно вычислить коэффициент $\alpha = \frac{\alpha}{m} m \approx 0,333 \text{ с}^{-1} \cdot 0,36 \text{ г} \approx 1,20 \cdot 10^{-4} \text{ кг/с}$. Поскольку измерение массы – самое неточное (ошибка около 3%), то величину силы мы описываем с меньшей точностью, но все равно лучше 5%: $\alpha = (1,20 \pm 0,04) \cdot 10^{-4} \text{ кг/с}$.

Ответ: экспериментальные данные описываются с требуемой точностью в рамках модели, в которой шарик движется под действием сил тяжести $\vec{F}_g = m \vec{g}$ (m и \vec{g} заданы в условии) и силы сопротивления воздуха $\vec{F}_c = -\alpha \vec{v}$, где $\alpha = (1,20 \pm 0,04) \cdot 10^{-4} \text{ кг/с}$.

Примечания.

1. Разобранная в предлагаемом решении модель – не единственная правильная. Более того, можно построить модели, в которых точность описания скоростей и перемещений будет даже выше – на-

пример, можно использовать более сложные модельные формулы для силы сопротивления воздуха. В частности, можно предложить, что $\vec{F}_c = -\alpha\vec{v} - \beta v\vec{v}$, или $\vec{F}_c = -\alpha v^{\gamma}\vec{v}$. Поскольку эти выражения содержат два подбираемых параметра, то они могут описать реальную зависимость точнее, чем в разобранный пример. Недостаток этих моделей состоит в том, что они заметно сложнее для анализа, особенно в части используемых математических методов. И так, правильным считалось не решение, совпадающее с предложенным выше, а решение, в котором предложенная модель была правильно проанализирована и было доказано, что уровень точности удовлетворяет требованиям условия. Отметим, что из-за достаточно высокой ошибки в определении массы (а ее значение всегда необходимо для вычисления сил по наблюдаемым ускорениям), точность описания кинематических величин должна быть лучше 5%.

2. Модель должна быть именно физической, а не математической, т.е. в ней должна быть указана природа сил и объяснено их поведение. Так как по условию опыт Трурля по изучению падения шарика происходил на Земле (обратите внимание на слова «из геофизических данных» в условии задачи), то весьма нелогично было учитывать в модели какие-либо экзотические силы неземного происхождения и при этом не учитывать ту же силу сопротивления воздуха. Нефизично считать, что такая сила будет зависеть от высоты над поверхностью Земли из-за неоднородности воздуха (в диапазоне высот до 15 метров!) и при этом не учитывать ее зависимости от мгновенной скорости тела относительно среды – именно от скорости в первую очередь должна зависеть сила сопротивления движению тела в газообразной среде. Не является физической модель, в которой дополнительной силе – независимо от ее предполагаемой природы – в каждый момент времени падения просто приписывается значение, которое при ее действии совместно с силой тяжести отвечает в точности наблюдаемому ускорению. В такой модели сила зависит от времени, причем вид описывающей ее поведение функции каждый раз зависит от начальной высоты тела.

3. В условии были описаны действия экспериментатора, поэтому при составлении модели не следовало предполагать, что автор задачи скрыл часть этих действий. Дополнительные факторы (кроме заданной в условии силы тяжести), учитываемые в модели, должны были быть естественного, а не искусственного происхождения. Например,

можно было считать шарик проводящим и учитывать действие на него электрического поля Земли (которая действительно обладает зарядом и создает такое поле), но нельзя было предполагать, что экспериментатор специально, для запутывания участников олимпиады, создавал дополнительное силовое поле да еще изменял его во время падения шарика по какому-либо довольно сложному закону. Нельзя было считать, что экспериментатор бросал шарик с ненулевыми скоростями, не вдоль вертикали и т.д. Если допустить такие возможности, можно без труда «объяснить» вообще все, что угодно.

4. В разобранном решении анализ модели был проведен на основе математического вывода из уравнения движения соотношений между измеренными величинами. Затем с помощью этих соотношений определялись входящие в модельные выражения для сил константы. Но это тоже не единственно правильный путь. Можно было построить анализ следующим образом. Например, сначала предположить, что на шарик действовала сила сопротивления, зависящая от скорости. Затем из уравнения движения выразить эту силу через мгновенные значения ускорения и скорости: $F_c(v) = m(g - a_x)$. После этого из экспериментальных данных найти максимальное количество точек графика этой зависимости. Для этого следует рассмотреть таблицу данных как таблицу значений скорости от времени в ходе одного падения с высоты 15 м. Тогда среднее на каждом интервале

времени значение ускорения $\bar{a}_i = \frac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i}$ можно поставить в соот-

ветствие средней скорости $\bar{v}_i = \frac{v_{i+1} + v_i}{2}$. Так находится 14 точек

графика: $F_c(\bar{v}) = m(g - \bar{a})$. Если ввести естественное предположение о том, что на покоящееся по отношению к воздуху тело сила сопротивления не действует, то есть $F_c(0) = 0$, то появляется и 15-я точка. Далее нужно через эти 15 точек (с учетом разброса значений скорости и ускорения) провести график модельной зависимости наилучшим образом. Конечно, в этом методе точность определения констант будет заметно ниже (в основном из-за того, что замена мгновенных значений ускорения и скорости на средние вносит довольно значительную ошибку), но при аккуратном исполнении можно обеспечить требуемую точность – например, с зависимостью $F_c(v) = \alpha v$, в которой коэффициент α подбирается так, чтобы минимизировать

сумму квадратов отклонений экспериментальных точек от теоретической кривой, то есть $S(\alpha) = \sum_i [m(g - \bar{a}_i) - \alpha \bar{v}_i]^2$ (такой метод называется методом наименьших квадратов).

Отметим, что среди участников были как те, кто действовал методом, описанным в примерном решении, так и те, кто использовал метод из примечания 4, и даже те, кто использовал более сложные зависимости $F_c(v)$.

II. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Задания для 7-х – 9-х классов

II.1. Обозначим через v скорость автомобильчика, выраженную в м/с. Тогда времена прохождения автомобильчиком полного круга по трем дорожкам выразятся следующим образом: $t_1 = \frac{2\pi R_1}{v}$, $t_2 = \frac{2\pi R_2}{1+v}$, $t_3 = \frac{2\pi R_3}{1,9+v}$. По условию $t_2 < t_3 < t_1$. Ясно, что наиболее строгие границы для возможных значений скорости автомобильчика дадут крайние неравенства: $t_2 < t_3$ и $t_3 < t_1$. Имеем $\frac{R_2}{1+v} < \frac{R_3}{1,9+v}$ и $\frac{R_3}{1,9+v} < \frac{R_1}{v}$. Отсюда $v > \frac{43}{20}$ м/с и $v < \frac{19}{8}$ м/с. Среднее значение скорости для полученного интервала $v \approx \frac{181}{80}$ м/с $\approx 2,26$ м/с. Возможный разброс значений скорости не превышает 0,12 м/с.

Ответ: $v \approx (2,26 \pm 0,12)$ м/с.

II.2. Пусть N – скорость поступления теплоты в кастрюлю, которую определим как мощность, сообщаемую плитой, минус мощность, отдаваемую в окружающую среду. По условию N практически постоянна. Обозначим через C_k теплоемкость кастрюли вместе с компотом, а через C_v – теплоемкость долитой воды. Уравнение теплового баланса для процесса закипания компота имеет вид: $NT = C_k(t_1 - t_0)$, откуда

$\frac{N}{C_k} = \frac{t_1 - t_0}{T}$. Уравнение теплового баланса для процесса разбавления компота водой таково: $C_k(t_1 - t) = C_B(t - t_0)$, где t – искомая температура. Отсюда следует, что $\frac{C_B}{C_k} = \frac{t_1 - t}{t - t_0}$. Наконец, запишем уравнение теплового баланса для процесса второго закипания компота: $N\tau = (C_k + C_B)(t_1 - t)$. Разделив обе части этого равенства на C_k , имеем $\frac{N}{C_k}\tau = \left(1 + \frac{C_B}{C_k}\right)(t_1 - t)$. Используя полученные ранее соотношения, находим, что $t = \frac{Tt_1 + \tau t_0}{T + \tau}$. **Ответ:** $t = \frac{Tt_1 + \tau t_0}{T + \tau} \approx 89^\circ\text{C}$

П.3. Внутренние сопротивления вольтметров настолько велики, что токи через них порядка одной десятитысячной доли тока через резисторы. Поэтому при вычислении тока резисторы сопротивления вольтметров можно считать бесконечно большими. В самом деле, цена деления шкалы вольтметров соответствует измерению напряжений с точностью порядка $\frac{0,1}{0,6 \cdot 100} \approx 0,2\%$. Следовательно, напряжения на резисторах $U_1 \approx IR_1$,

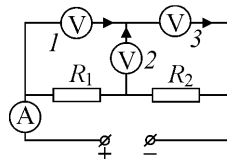


Рис. 40

$U_2 \approx IR_2$. Если V_1, V_2, V_3 – показания вольтметров, соответствующие разностям потенциалов между точками их подключения, то $U_1 = V_1 - V_2$ и $U_2 = V_2 + V_3$. При этом положительные направления токов через вольтметры выбраны так, как показано на рис. . Если истинные направления токов не совпадают с выбранными, то напряжения на вольтметрах окажутся отрицательными, но это не мешает нам определить их величину. Кроме того, поскольку ток через вольтметр 3 равен сумме токов через вольтметры 1 и 2, а их сопротивления одинаковы, то $V_3 = V_1 + V_2$. Решая полученную систему, находим искомые напряжения.

Ответ: $V_1 \approx \frac{I(2R_1 + R_2)}{3} = 28 \text{ В}, V_2 \approx \frac{I(R_2 - R_1)}{3} = 4 \text{ В},$

$V_3 \approx \frac{I(R_1 + 2R_2)}{3} = 32 \text{ В}.$

II.4. Силы, действующие на тела системы, изображены на рис. 41, где mg и Mg – силы тяжести, T – сила натяжения правой веревки, T' – сила натяжения левой веревки. В состоянии равновесия сила тяжести, действующая на обезьянку, уравнивается утроенной силой натяжения правой веревки, откуда $T = \frac{Mg}{3}$. Из условия равновесия левого подвижного блока следует, что сила натяжения левой веревки $T' = \frac{T}{2} = \frac{Mg}{6}$. Поскольку при равновесии груза

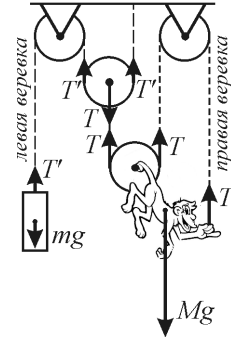


Рис. 41

$T' = mg$, то $m = \frac{M}{6} = 3,5$ кг. При разгоне тел до скоростей, с которыми они будут двигаться равномерно, обезьянка за счет своих мускульных усилий увеличит силу натяжения T так, что она станет больше $\frac{Mg}{3}$. За время разгона Δt направленная вверх скорость

обезьянки станет равной $v = \frac{3T - Mg}{M} \Delta t$. Так как масса левого подвижного блока пренебрежимо мала, то по-прежнему $T' = \frac{T}{2}$. Под действием

этой силы груз разгонится до скорости $V = \frac{T' - mg}{m} \Delta t = \frac{T - 2mg}{m} \Delta t = \frac{3T - Mg}{M} \Delta t = v$, также направленной вверх.

Заметим, что левый подвижный блок при этом должен опускаться, так как всякое смещение груза вверх сопровождается опусканием этого блока на вдвое меньшее расстояние. Значит этот блок наберет скорость

$V' = \frac{v}{2}$, направленную вниз. Когда конец правой веревки за время t

смещается вниз на расстояние ut , сумма длин трех вертикальных отрезков этой веревки выше уровня обезьянки уменьшается на такую же величину. С другой стороны, эта длина уменьшается за счет перемещения обезьянки вместе с нижним блоком вверх на расстояние $3vt$ и за счет опускания верхнего блока на расстояние $\frac{v}{2}t$. Следовательно,

$\left(3v + \frac{v}{2}\right)t = ut$, откуда $v = \frac{2}{7}u$. Скорость сближения верхнего и нижнего блоков равна $\frac{v}{2} + v = \frac{3}{2}v = \frac{3}{7}u$. Пренебрегая временем разгона системы Δt по сравнению с временем ее равномерного движения, находим, что время подъема обезьянки до столкновения блоков $t \approx \frac{7h}{3u} = 7$ с.

Работа, совершенная обезьянкой, равна увеличению механической энергии системы. Приращение кинетической энергии обезьянки и груза $\Delta E_k = \frac{(M+m)v^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{6} M \left(\frac{2u}{7}\right)^2 = \frac{Mu^2}{21} = 1$ Дж. Двигаясь с одинаковыми скоростями, обезьянка и груз поднимутся на высоту $s = \frac{2}{7}ut = \frac{2h}{3}$, поэтому увеличение потенциальной энергии системы

$\Delta E_{\text{п}} = (M+m)gs = \frac{7}{9}Mgh \approx 480,2$ Дж (при $g = 9,8$ м/с²). Таким образом,

искомая работа $A = \Delta E_k + \Delta E_{\text{п}} = M \left(\frac{u^2}{21} + \frac{7gh}{9} \right) \approx 481,2$ Дж.

Ответ: $m = \frac{M}{6} = 3,5$ кг; $t \approx \frac{7h}{3u} = 7$ с; $A = M \left(\frac{u^2}{21} + \frac{7gh}{9} \right) \approx 481,2$ Дж.

Задания для 10-х – 11-х классов

Механика

П.5. Скорость каждой из шайб можно найти как сумму скорости движения центра масс системы и скорости вращения этой шайбы вокруг центра масс. Ясно, что центр масс движется равномерно и прямолинейно, т.е. его скорость $\vec{V} = \frac{1}{3}\vec{v}_1 + \frac{2}{3}\vec{v}_2 = \text{const}$, где \vec{v}_1 и \vec{v}_2 – мгновенные скорости шайб в любой момент времени. Рассмотрим момент времени, описанный в условии, и направим оси координат так, как показано на рис. 42. Поскольку нить на-

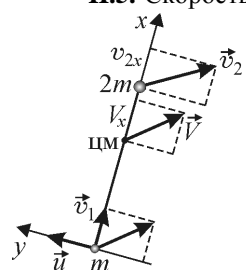


Рис. 42

тянута и нерастяжима (расстояние между ее любыми двумя точками постоянно), то проекции скоростей ее точек на ось x равны: $v_{1x} = v = v_{2x} = V_x$. Поскольку по условию $|\vec{v}_2| = 2v$, то $v_{2y} = \sqrt{(2v)^2 - v^2} = \sqrt{3}v$. Следовательно, $V_y = \frac{1}{3}v_{1y} + \frac{2}{3}v_{2y} = -\frac{2}{\sqrt{3}}v$. С другой стороны, линейная скорость \vec{u} вращения первой шайбы вокруг центра масс направлена по оси y и равна $u = v_{1y} - V_y = \frac{2}{\sqrt{3}}v$. Центробежное ускорение первой шайбы при вращении вокруг центра масс по окружности радиуса $r_1 = \frac{2}{3}L$ создается именно силой натяжения нити, поэтому: $T = m \frac{u^2}{r_1} = \frac{2m v^2}{L}$. **Ответ:** $T = \frac{2m v^2}{L}$.

П.6. Так как блоки идеальны, а нить легкая и нерастяжимая, то она во всех точках натянута одинаково с силой T . Со стороны нити на раму действуют силы, горизонтальная составляющая которых равна $4T$, а вертикальная – T (эта сила дополнительно прижимает раму к поверхности). Запишем уравнения движения рамы и груза в проекциях на горизонтальную ось x и вертикальную ось y (см. рис. 43, на котором показаны

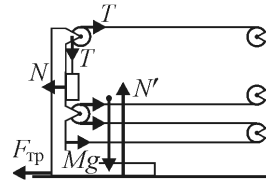


Рис. 43

силы, действующие на раму): $Ma_p = 4T - N - F_{тр}$, $0 = N' - Mg - T$, $ma_x = N$, $ma_y = T - mg$. Здесь a_p – ускорение рамы, \vec{a} – ускорение груза, N – нормальная составляющая силы взаимодействия между грузом и рамой, N' – сила нормальной реакции со стороны поверхности, действующая на раму). При скольжении рамы $F_{тр} = \mu N' = \mu(Mg + T)$. Кроме того, в системе имеются кинематические связи: так как груз по горизонтали движется вместе с рамой, то $a_x = a_p$. Так как сдвиг рамы на Δx вправо приведет к тому, что длина вертикальной части натянутой нити увеличится на $4\Delta x$, то при движении рамы вправо груз будет опускаться и $a_y = -4a_p$. Решая получен-

ную систему относительно a_p , находим, что $a_p = \frac{(4 - \mu)m - \mu M}{M + (17 - 4\mu)m} g$.

Ясно, что этот ответ имеет смысл только при $\mu \leq \frac{4m}{M + m}$, в противном случае рама остается неподвижной и $a_p = 0$.

Ответ: $a_p = \frac{(4 - \mu)m - \mu M}{M + (17 - 4\mu)m} g$ при $\mu \leq \frac{4m}{M + m}$;

$a_p = 0$ при $\mu > \frac{4m}{M + m}$.

П.7. Рассмотрим момент времени, когда стержень отклонился от вертикали на угол α (рис. 44). Пренебрегая кинетической энергией нижнего шарика, из закона сохранения энергии найдем, что пока нижний шарик не отрывается от стенки, скорость верхнего шарика удовлетворяет соотношению $\frac{mv^2}{2} + mgL \cos(\alpha) = \frac{mv_0^2}{2} + mgL$, откуда $v^2 = v_0^2 + 2gL[1 - \cos(\alpha)]$. Центробежное ускорение этого шарика создается радиальной компонентой силы тяжести и силой упругости стержня. Так как верхний шарик движется по окружности радиуса L ,

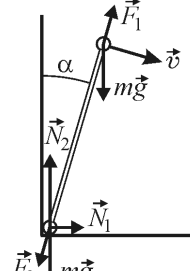


Рис. 44

то $m \frac{v^2}{L} = mg \cos(\alpha) - F_1$, откуда $F_1 = mg[3 \cos(\alpha) - 2] - m \frac{v_0^2}{L}$ (сила упругости считается положительной, когда стержень сжат). На нижний шарик действуют силы тяжести, упругости стержня $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, и силы нормальных реакций стенки и пола. Условие равновесия нижнего шарика по горизонтали имеет вид $N_1 = -F_2 \sin(\alpha) = mg \sin(\alpha)[3 \cos(\alpha) - 2 - n]$,

где $n \equiv \frac{v_0^2}{gL}$. Таким образом, сила давления шарика на стенку максимальна, когда достигает максимума функция $f(\alpha) = \sin(\alpha)[3 \cos(\alpha) - 2 - n]$. Отметим, что при $\alpha_0 = \arccos\left(\frac{n+2}{3}\right)$ сила давления обращается в ноль, то есть в процессе дальнейшего движения

нижний шарик отрывается от стены. Поэтому искомое значение угла должно находиться в интервале значений угла от 0 до α_0 , причем при $n \geq 1$, т.е. при $v_0 \geq \sqrt{gL}$ отрыв происходит сразу после толчка, и в этом случае нижний шарик не давит на стену – ответа на вопрос задачи не существует.

Записывая уравнение $f'(\alpha) = 6\cos^2(\alpha) - (n+2)\cos(\alpha) - 3 = 0$, и выбирая положительное значение косинуса, найдем, что для искомого угла

$\cos(\alpha) = \frac{2+n+\sqrt{76+4n+n^2}}{12}$. Видно, при $v_0 = \sqrt{gL}$ это значение угла

обращается в нуль. Итак, давление на стенку максимально, когда

$$\alpha = \arccos\left[\frac{2gL+v_0^2+\sqrt{76g^2L^2+4gLv_0^2+v_0^4}}{12gL}\right] \text{ при } v_0 < \sqrt{gL}.$$

Ответ: $\alpha = \arccos\left[\frac{2gL+v_0^2+\sqrt{76g^2L^2+4gLv_0^2+v_0^4}}{12gL}\right] \text{ при } v_0 < \sqrt{gL};$

если $v_0 \geq \sqrt{gL}$, то шарик на стенку не давит.

П.8. Рассмотрим взаимодействие кольца с бортом. На кольцо будут действовать сила нормальной реакции борта \vec{N} и сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 45). По условию, действие силы нормальной реакции совпадает с ее действием при упругом ударе, поэтому проекция скорости кольца на ось y просто

меняет знак на противоположный, и изменение импульса кольца в проекции на ось y равно $mv_y - [-mv_0 \cos(\alpha)] = 2mv_0 \cos(\alpha) = N\Delta t$, где \vec{v} – скорость центра масс кольца после удара, а Δt – малое время удара. Учтем, что в момент касания y кольца есть ненулевая скорость вдоль борта. Если в процессе удара силы трения не успевают остановить проскальзывание, то в течение всего времени Δt сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N$, и изменение импульса кольца в про-

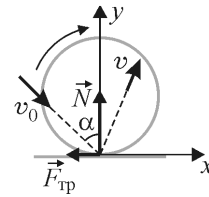


Рис. 45

екции на ось x равно $mv_x - mv_0 \sin(\alpha) = -\mu N \Delta t = -2\mu m v_0 \cos(\alpha)$. Таким образом, проекция скорости центра кольца на ось x после удара равна $v_x = v_0 [\sin(\alpha) - 2\mu \cos(\alpha)]$. Поскольку для заданных значений $\sin(\alpha) - 2\mu \cos(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{2}} > 0$, то скольжение кольца по борту действительно не прекращается за время удара. Кроме того, именно сила трения создает вращательное движение кольца одновременно с торможением проскальзывания. Увеличение линейной скорости вращательного движения можно найти из соотношения $mv_{\text{вр}} - 0 = \mu N \Delta t = 2\mu m v_0 \cos(\alpha)$, откуда $v_{\text{вр}} = 2\mu v_0 \cos(\alpha)$. Для угловой скорости кольца после удара получаем $\omega = \frac{v_{\text{вр}}}{a} = \frac{2\mu v_0 \cos(\alpha)}{a}$. **Ответ:** $\omega = \frac{2\mu v_0 \cos(\alpha)}{a} \approx 8,84 \text{ с}^{-1}$.

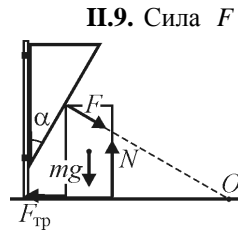


Рис. 46

П.9. Сила F , действующая на клин со стороны бруска, направлена перпендикулярно поверхности клина, и ее вертикальная составляющая уравнивает вес клина: $F \sin(\alpha) = \frac{mg}{n}$, откуда $F = \frac{mg}{n \sin(\alpha)}$, где m – масса бруска. На брусок в состоянии покоя действует равная ей по величине сила F , сила тяжести mg , сила нормальной реакции поверхности N и сила трения покоя $F_{\text{тр}}$ (рис. 46). Сила трения должна быть равна $F_{\text{тр}} = F \cos(\alpha) = \frac{mg}{n} \text{ctg}(\alpha)$, а сила нормальной реакции поверхности $N = F \sin(\alpha) + mg = mg \frac{n+1}{n}$. Условие отсутствия проскальзывания имеет вид $F_{\text{тр}} \leq \mu N$, откуда $\text{ctg}(\alpha) \leq \mu(n+1)$ и $\alpha \geq \arctg\left(\frac{1}{\mu(n+1)}\right) = \arctg(0,5) \approx 26,6^\circ$. С другой стороны, брусок не будет опрокидываться, если точка приложения силы нормальной реакции не выходит из его площади опоры. Для этого угол α должен быть не слишком маленьким. «Критический» угол определяется из условия, что точка приложения силы N смещается на край площади опоры. Правило моментов относительно точки O для этого случая дает уравнение

$N \cdot [nd \operatorname{ctg}(\alpha) - d] = mg[nd \operatorname{ctg}(\alpha) - d + d/2]$. С учетом выражения для N находим, что для критического угла $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{2n}{n+2}$. Поэтому брусок не будет опрокидываться, если $\alpha \geq \operatorname{arctg}\left(\frac{2n}{n+2}\right) = \operatorname{arctg}(1) = 45^\circ$. Более жестким оказывается второе ограничение, поэтому оно и является общим.

Ответ: $\alpha \geq \operatorname{arctg}\left(\frac{2n}{n+2}\right) = 45^\circ$.

П.10. На стержень с шариками действуют силы нормальной реакции поверхности «ямки» N_1 и N_2 (рис. 47). Ясно, что линии их действия – радиусы сферы, и они пересекаются в центре сферической поверхности (в точке O). В роли третьей силы здесь выступает равнодействующая сил тяжести шариков $(m_1 + m_2)g$. Ее точка приложения – центр тяжести гантели (точка C), а линия ее действия вертикальна и проходит через точку O . Значит, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{|CB|}{|CA|}$. Кроме того, соотношение между дли-

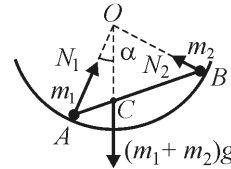


Рис. 47

ной стержня и радиусом позволяет определить угол при вершине O в треугольнике OAB : это равнобедренный треугольник с основанием в $\sqrt{2}$ раз больше боковой стороны, и он является прямоугольным, а углы при основании равны $\frac{\pi}{4}$. По теореме синусов получим, что

$$|AC| = \sin \alpha \cdot \frac{|OC|}{\sin(\pi/4)} \quad \text{и} \quad |BC| = \sin(\pi/2 - \alpha) \cdot \frac{|OC|}{\sin(\pi/4)} = \cos \alpha \cdot \frac{|OC|}{\sin(\pi/4)}.$$

Поэтому $\frac{m_1}{m_2} = \operatorname{ctg} \alpha$. **Ответ:** $\frac{m_1}{m_2} = \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$.

П.11. Будем следить за движением пробки в проекции на горизонтальную координатную ось x . Ускорение появляется благодаря давлению вертикального столба жидкости, которое обращается практически в ноль, когда вся жидкость перельется в горизонтальное колено. Поэтому совместим начало отсчета координаты x с положением проб-

ки именно в этот момент времени. С учетом неразрывности течения жидкости, в любой момент времени вместе с пробкой будет двигаться с теми же скоростью и ускорением вся жидкость, и поэтому

$$(m + \rho SL)a_x = \rho S h(x)g = -\rho Sg x, \text{ или } x'' + \frac{\rho Sg}{m + \rho SL} x = 0. \text{ Здесь } m - \text{ мас-}$$

са пробки, а $h(x)$ – высота столба жидкости в вертикальном колене как функция x . Так как пробка легкая, то это уравнение сводится к виду

$$x'' + \frac{g}{L} x = 0. \text{ Поэтому от момента старта (когда } x(0) = -L, v_x(0) = 0) \text{ до}$$

момента переливания жидкости в горизонтальное колено ($x(t_1) = 0$) – пробка движется по гармоническому закону $x(t) = -L \cdot \cos(\omega t)$, где

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \text{ Переливание закончится в момент времени } t_1, \text{ при котором}$$

$$x(t_1) = 0, \text{ или } \cos(\omega t_1) = 0, \text{ откуда } t_1 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{g}}. \text{ Далее пробка и}$$

жидкость, очевидно, будут двигаться с постоянной скоростью $V = v_x(t_1) = \omega L \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \omega L = \sqrt{gL}$. Поэтому оставшийся путь по трубке

пробка пройдет за время $t_2 = \frac{L/2}{V} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{g}}$, и полное время движения

$$\text{пробки по трубке } t = t_1 + t_2 = \frac{\pi+1}{2} \sqrt{\frac{L}{g}}. \text{ Ответ: } t = \frac{\pi+1}{2} \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Молекулярная физика и термодинамика

П.12. В каждом из равновесных состояний поршня давление гелия $p_{1,2,3}$ уравнивает вес поршня массой m_0 , вес песка и внешнее давление p_0 , т.е. $p_1 S = m_0 g + p_0 S$, $p_2 S = (m_0 + m)g + p_0 S$,

$$p_3 S = \left(m_0 + \frac{2m}{3}\right)g + p_0 S. \text{ Кроме того, поскольку температура неиз-}$$

менна, то давления изменяются обратно пропорционально объемам, поэтому $\frac{h_0}{h_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{(m_0 + m)g + p_0 S}{m_0 g + p_0 S} = 1 + \frac{mg}{p_1 S}$, откуда $\frac{mg}{p_1 S} = \frac{h_0}{h_1} - 1$. С

другой стороны, для конечной высоты положения поршня h справедливо соотношение: $\frac{h_1}{h} = \frac{p_3}{p_2} = \frac{(m_0 + 2m/3)g + p_0S}{p_1(h_0/h_1)S} = \frac{p_1S + 2mg/3}{p_1(h_0/h_1)S} = \frac{h_1}{h_0} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{mg}{p_1S} \right]$. Подставляя сюда полученное выше выражение, находим, что $h = \frac{3h_0h_1}{h_1 + 2h_0}$. **Ответ:** $h = \frac{3h_0h_1}{h_1 + 2h_0} = 27$ см.

П.13. Азот – двухатомный газ, поэтому его внутренняя энергия равна $U = \frac{5}{2} \nu RT$. По условию, охлаждение азота происходит в процессе, который на pV -диаграмме (рис. 48) показан как процесс 1 – 2. В этом процессе давление меняется пропорционально объему, то есть $p_2 = p_1 \frac{V_2}{V_1}$. Изменение температуры азота

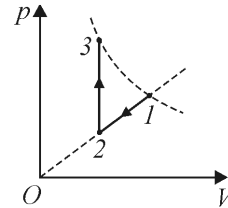


Рис. 48

в этом процессе можно вычислить с использованием уравнения Менделеева–Клапейрона, а именно

$$\Delta T_{12} = T_2 - T_1 = \frac{p_2 V_2}{\nu R} - \frac{p_1 V_1}{\nu R}. \text{ С учетом уравнения процесса найдем,}$$

$$\text{что } \Delta T_{12} = \frac{p_1(V_2^2 - V_1^2)}{\nu R V_1}. \text{ Ясно, что эта величина отрицательная. Значит,}$$

$$\Delta U_{12} = \frac{5}{2} \nu R \Delta T_{12} = \frac{5}{2} \frac{p_1(V_2^2 - V_1^2)}{V_1}. \text{ Работа в этом процессе вычисляется как площадь под } pV \text{-диаграммой процесса, т.е.}$$

$$A_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) = \frac{p_1(V_2^2 - V_1^2)}{2V_1} = \frac{1}{2} \nu R \Delta T_{12}. \text{ Таким образом,}$$

$Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = 3\nu R \Delta T_{12}$. Мы фактически выяснили, что молярная теплоемкость азота в таком процессе равна $3R$ и постоянна. Процесс

2 – 3 изохорный, и для него $Q_{23} = \Delta U_{23} = \frac{5}{2} \nu R \Delta T_{23}$. Так как

$$\Delta T_{12} = -\Delta T_{23}, \text{ то искомое отношение равно } \frac{|Q_{12}|}{Q_{23}} = \frac{6}{5}. \text{ Ответ: } \frac{Q_-}{Q_+} = \frac{6}{5}.$$

П.14. В адиабатном процессе количество теплоты, которой гелий обменивается с окружающими телами, $\delta Q = 0$. Заданное в условии изменение давления гелия δp , как и изменение его объема δV , можно считать малыми. Полагая, что гелий является одноатомным идеальным газом, имеем приближенное равенство

$$\delta Q = p_0 \delta V + \frac{3}{2} \delta(pV) \approx \frac{5}{2} p_0 \delta V + \frac{3}{2} V_0 \delta p = 0.$$

Из этого равенства находим, что работа, совершенная над гелием $A \approx -p_0 \delta V \approx \frac{3}{5} V_0 \delta p = \frac{3}{5} p_0 V_0 \frac{\delta p}{p_0}$.

Согласно условию, $\frac{\delta p}{p_0} = \frac{1}{200}$, а из уравнения состояния $p_0 V_0 = \nu R T_0$.

Поэтому $A \approx \frac{3}{1000} \nu R T_0$, откуда $T_0 \approx \frac{1000A}{3\nu R}$.

Ответ: $T_0 \approx \frac{1000A}{3\nu R} \approx 250 \text{ К}$.

П.15. Пронумеруем точки на pV -диаграмме цикла, как показано на рис. 49. Пусть давление и объем газа в точке 1 равны p_1 и V_1 . Тогда, согласно условию: $p_2 = p_1$, $T_2 = nT_1$, откуда $V_2 = nV_1$, $V_3 = \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{n+1}{2} V_1$. Поскольку точки 2 и 3 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, то $\frac{p_3}{p_2} = \frac{V_3}{V_2} = \frac{n+1}{2n}$, отку-

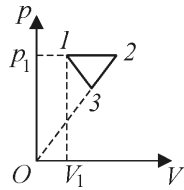


Рис. 49

да $p_3 = \frac{n+1}{2n} p_1$. При заданном $n = 2$ теплота поступает к рабочему телу только на участке 1 – 2, поэтому количество теплоты, полученное газом от нагревателя, $Q_H = Q_{12} = p(V_2 - V_1) + \frac{3}{2} p(V_2 - V_1) = \frac{5}{2} (n-1) p_1 V_1$. Работа

газа в цикле равна $A = \frac{1}{2} (V_2 - V_1)(p_1 - p_3) = \frac{(n-1)^2}{4n} p_1 V_1$. Поэтому

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{n-1}{10n}. \quad \text{Ответ: } \eta = \frac{n-1}{10n} \cdot 100\% = 5\%.$$

П.16. Нетрудно заметить, что газ получает теплоту только в процессе $1 - 2$, а отдает – только в процессе $3 - 1$. Поэтому количество теплоты, полученное газом от нагревателя, равно $Q_H = Q_{12} = \frac{3}{2}(p_2 - p_1)V_1 = \frac{3}{2}np_1V_1$, а количество теплоты, отданное холодильнику, $Q_X = -Q_{31} = \frac{5}{2}p_1(V_3 - V_1) = \frac{5}{2}kp_1V_1$. Следовательно, КПД цикла $\eta = 1 - \frac{Q_X}{Q_H} = 1 - \frac{5k}{3n}$. **Ответ:** $\eta = \left(1 - \frac{5k}{3n}\right) \cdot 100\% = 37,5\%$.

П.17. Поскольку в конечном состоянии на стенках сосуда выступили мелкие капельки росы, то водяной пар в баллоне достиг насыщения, и его давление стало равным $p_1 \approx 10^5$ Па. Поэтому количество водяного пара $\nu_1 = \frac{p_1 V}{RT} \approx 0,6452$ моль. Вместе с жидкой частью, составляющей $\frac{1\text{ г}}{18\text{ г/моль}} \approx 0,0556$ моль, количество воды в баллоне равно $\nu_B \approx 0,7$ моль. Оставшуюся часть давления создает смесь газов (CO_2 и либо метан, либо кислород, не израсходованные в реакции), общее количество которых $\nu_2 = \frac{(p - p_1)V}{RT} \approx 0,5$ моль. До начала процесса все вещества в баллоне находились в газообразном состоянии, и первоначальное давление $p_0 = \frac{(\nu_B + \nu_2)RT_0}{V} \approx 1,5 \cdot 10^5$ Па. В соответствии с уравнением реакции количество CO_2 в два раза меньше количества воды и равно 0,35 моль, и поэтому второй газ в смеси содержится в количестве 0,15 моль. Таким образом, изначально в баллоне были либо 0,35 моль (5,6 г) метана и 0,85 моль (27,2 г) кислорода, либо 0,5 моль (8 г) метана и 0,7 моль (22,4 г) кислорода.

Ответ: $p_0 = \frac{(\nu_B + \nu_2)RT_0}{V} \approx 1,5 \cdot 10^5$ Па; первоначально в баллоне были либо 5,6 г метана и 27,2 г кислорода; либо 8 г метана и 22,4 г кислорода.

П.18. Так как пар насыщенный, то его давление p_n определяется только температурой T . Поэтому начальное давление гелия $p = p_n + \frac{Mg}{S}$, откуда $p_n = p - \frac{Mg}{S}$. При нагревании гелий будет расширяться, совершая работу против веса поршня и силы давления пара. Давление пара изменяться не будет, так как температура неизменна, но будет происходить его конденсация. Часть образовавшейся воды осядет на поршне, увеличивая его массу. Однако, поскольку по условию поршень «тяжелый», можно считать, что масса пара много меньше массы поршня и изменением массы поршня из-за конденсации можно пренебречь. Тогда расширение гелия происходит почти изобарно, и подведенная к нему при увеличении его объема на ΔV теплота $Q_1 = A + \Delta U \approx p\Delta V + \frac{3}{2}\Delta(pV) \approx \frac{5}{2}p\Delta V$. Для сохранения постоянной температуры пара от него нужно отводить теплоту конденсации $Q_2 = r \cdot \Delta m$, где Δm – масса сконденсировавшейся воды. Поскольку плотность насыщенного водяного пара можно выразить через давление, используя уравнение Менделеева-Клапейрона $\rho_n = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\mu p_n}{RT}$, то $\Delta m = \frac{\mu p_n}{RT} \Delta V = \frac{\mu(p - Mg/S)}{RT} \Delta V$, и $Q_2 = r \cdot \frac{\mu(p - Mg/S)}{RT} \Delta V$. Значит, $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{2r\mu}{5RT} \left(1 - \frac{Mg}{pS}\right)$. **Ответ:** $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{2r\mu}{5RT} \left(1 - \frac{Mg}{pS}\right)$.

Электродинамика

П.19. Рассматривая характер взаимодействия шарика с кольцами, легко заметить, что электростатические силы будут тормозить движение шарика от исходной точки (A) до центра среднего кольца (O), а дальше они будут его разгонять. Поэтому для прохождения системы колец шарик достаточно пройти точку O . Рассмотрим сначала потенциал зарядов одного кольца на его оси. Поскольку все заряды кольца находятся от данной точки на одинаковом расстоянии $\sqrt{a^2 + l^2}$, где a – радиус кольца, а l расстояние от плоскости кольца до точки вдоль оси, то $\varphi(l) = \frac{kQ}{\sqrt{a^2 + l^2}}$, где $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. Воспользовавшись принципом супер-

позиции, определим потенциалы точек A и O в поле зарядов всех трех колец:

$$\varphi_A = \frac{k(-Q)}{a\sqrt{2}} + \frac{k \cdot 2Q}{a\sqrt{5}} + \frac{k(-Q)}{a\sqrt{10}} = -\frac{kQ}{a\sqrt{10}}(\sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{2}),$$

$$\varphi_O = \frac{k(-Q)}{a\sqrt{2}} + \frac{k \cdot 2Q}{a} + \frac{k(-Q)}{a\sqrt{2}} = \frac{kQ}{a}(2 - \sqrt{2}).$$

Закон сохранения энергии для случая, когда в точке O у шара есть ненулевая кинетическая энергия, дает: $\frac{mv_0^2}{2} + q\varphi_A > q\varphi_O$, откуда

$$v_0 > \sqrt{\frac{2q}{m}(\varphi_O - \varphi_A)} = \sqrt{\frac{2kqQ}{ma} \cdot \frac{(\sqrt{5} - 1)(2\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{10}}}.$$

Ответ: $v_0 > \sqrt{\frac{2kqQ}{ma} \cdot \frac{(\sqrt{5} - 1)(2\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{10}}}.$

П.20. Электростатические силы потенциальны, поэтому работа этих сил не зависит от пути перемещения тела, а зависит только от разности потенциалов конечной и начальной точек. Проводящий шар эквипотенциален – вместо потенциала точки A можно взять потенциал любой другой точки шара – например, его центра. Под действием поля зарядов крайних шаров заряды на проводящем шаре перераспределятся сложным образом, но это не повлияет на потенциал центра – полный заряд поверхности шара неизменен. Потенциал центра проводящего шара считается по принципу суперпозиции

$$\varphi_A = 2 \cdot \frac{kq}{3a} + \frac{k(-2q)}{a} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{kq}{a}.$$

Потенциал точек, удаленных на большое расстояние от рассматриваемой системы зарядов, равен нулю. Поэтому увеличение кинетической энергии иона равно

$$\frac{mv^2}{2} = \mp(0 - \varphi_A)\beta m = \mp \frac{4kq\beta m}{3a},$$

откуда $v = \sqrt{\frac{8kq\beta}{3a}}$. Видно, что для удаления на большое расстояние с нулевой начальной скоростью ион должен быть заряжен отрицательно.

Ответ: $v = \sqrt{\frac{8kq\beta}{3a}} \approx 387$ км/с.

П.21. В положении равновесия верхнего шарика выполняется равенство $mg - \frac{kq^2}{L^2} = 0$, где $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, а ϵ_0 – электрическая постоянная. Направим координатную ось x вдоль стержня вверх, начало отсчета совместим с положением равновесия. По второму закону Ньютона $ma_x = k \frac{q^2}{(L+x)^2} - mg$. С учетом первого уравнения имеем $\frac{kq^2}{gL^2} a_x = \frac{kq^2}{(L+x)^2} - \frac{kq^2}{L^2}$, откуда $a_x = -g \frac{x(2L+x)}{(L+x)^2}$. Т.к. колебания малые, то $x \ll L$, и $a_x \approx -\frac{2g}{L}x$. Частота колебаний в этом случае равна $\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$, а период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$. **Ответ:** $T = \pi\sqrt{\frac{2L}{g}}$.

П.22. Поскольку приборы являются идеальными, то вольтметр можно при изучении токов в схеме убрать, а точки, к которым подключен амперметр – замкнуть. Обозначим узлы схемы как показано на рис 50 а, и построим эквивалентную схему (рис. 50 б) без изменения токов в ее ветвях.

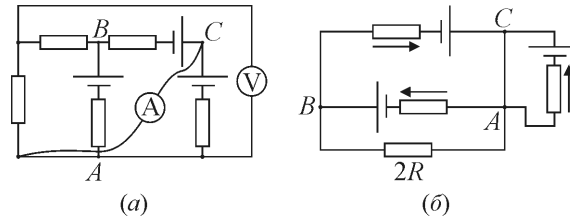


Рис. 50

Очевидно, что в контуре ABC течет ток $I = \frac{2\mathcal{E}}{2R} = \frac{\mathcal{E}}{R}$, и такой же ток течет через боковую ветвь схемы, причем напряжения $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = \mathcal{E} - IR = 0$. Поэтому полный ток через ветвь AC с амперметром равен $I_A = 2I = \frac{2\mathcal{E}}{R} = 0,32$ А, а вольтметр покажет нулевую величину напряжения. **Ответ:** $I_A = \frac{2\mathcal{E}}{R} = 0,32$ А; $U_V = 0$.

П.23. Если диод открыт, то токи I_1 и I_2 , текущие в ветвях с соответствующими ЭДС, удовлетворяют закону Ома: $\mathcal{E}_1 - I_1 r_1 = IR_n$, $\mathcal{E}_2 - I_2 r_2 = IR_n$, где R_n – сопротивление нагрузки. Обозначив через I ток в цепи нагрузки, из записанных равенств получим, что $I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} - \frac{R_n}{r_1} I$, $I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} - \frac{R_n}{r_2} I$. Учитывая, что $I = I_1 + I_2$, находим, что $I = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R_n (r_1 + r_2)}$. Поэтому мощность, выделяющаяся при открытом

диоде, $P = I^2 R_n = \left(\frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R_n (r_1 + r_2)} \right)^2 R_n$. Условие, что диод открыт,

выполняется, если $I_2 > 0$, то есть если $\mathcal{E}_2 > R_n I$, или $R_n < \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2} r_1$.

При $R_n > \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2} r_1$ диод заперт, и ток в нагрузке $I = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R_n}$, а выделяющаяся мощность $P' = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R_n} \right)^2 R_n$. При значениях R и r_1 , заданных в условии, $\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2} r_1 = 40$ Ом, то есть при использовании в качестве

нагрузки параллельно соединенных резисторов ($R_n = R/2 = 25$ Ом) диод открыт, а при последовательно соединенных ($R_n = 2R = 100$ Ом) – заперт. Поэтому $n = \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{[\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1][r_1 + 2R]}{\mathcal{E}_1 [2r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)]} \right)^2$.

Поэтому $n = \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{[\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1][r_1 + 2R]}{\mathcal{E}_1 [2r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)]} \right)^2$.

Ответ: $n = \left(\frac{[\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1][r_1 + 2R]}{\mathcal{E}_1 [2r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)]} \right)^2 \approx 3,34$.

П.24. Спустя достаточно большое время $t \gg \frac{R + 2r}{L}$ в схеме будут течь практически постоянные токи, и ЭДС индукции в катушке будет равна нулю. Таким образом, катушка будет играть роль резистора с

сопротивлением r . Токи в этой схеме зависят от состояния диода. Если диод заперт, то ток будет течь только через резистор, и сила тока $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$. Этот режим реализуется, если напряжение на резисторе меньше U_0 , т.е. при $\frac{\mathcal{E}}{R+r}R < U_0$, откуда $\mathcal{E} < U_0\left(1 + \frac{r}{R}\right)$. При $\mathcal{E} \geq U_0\left(1 + \frac{r}{R}\right)$ диод открывается, и тогда напряжение на нем постоянно и равно U_0 . Тогда для токов в схеме справедливы уравнения: $I_R R = \mathcal{E} - I r$, $I_R R = U_0 + I_L r$, $I = I_R + I_L$. Решая эту систему, находим, что $I_R = \frac{\mathcal{E} + U_0}{2R + r}$.

Ответ: $I_R = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$ при $\mathcal{E} < U_0\left(1 + \frac{r}{R}\right)$; $I_R = \frac{\mathcal{E} + U_0}{2R + r}$ при $\mathcal{E} \geq U_0\left(1 + \frac{r}{R}\right)$.

П.25. Зарядка конденсатора в данной схеме будет состоять из двух этапов: пока напряжение на конденсаторе меньше $\mathcal{E} - I_0 r - U_0 = \frac{nk - n - k}{k}U_0$, диод открыт и падение напряжения на нем равно U_0 . На последних стадиях зарядки диод перейдет в режим работы резистора, но не запрется, и зарядка продолжится вплоть до возникновения на конденсаторе заряда $q = C\mathcal{E}$. За время зарядки источник совершит работу, половина которой преобразуется в энергию поля в конденсаторе, а другая половина – выделяется в виде теплоты, т.е. $Q = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$. Это и есть общее количество выделившейся теплоты. Для подсчета тепловыделения на диоде нужно рассмотреть две стадии зарядки. На первой стадии $U_D = U_0$, и $Q_{D1} = q_1 U_0$, где q_1 – заряд, прошедший через диод на этой стадии. Ясно, что в процессе зарядки конденсатора до напряжения $\frac{nk - n - k}{k}U_0$ через диод протечет заряд $q_1 = C \frac{nk - n - k}{k}U_0$. Итак, $Q_{D1} = \frac{nk - n - k}{k}CU_0^2 = \frac{nk - n - k}{kn^2}C\mathcal{E}^2$. На вто-

рой стадии конденсатор заряжается от заряда q_1 до заряда q , поэтому работа источника $A_2 = (q - q_1)\mathcal{E} = \frac{(n+k)C\mathcal{E}^2}{nk}$, а увеличение энергии конденсатора $\Delta E_2 = \frac{q^2 - q_1^2}{2C} = \frac{(n+k)(2nk - n - k)}{2n^2k^2}C\mathcal{E}^2$. Поэтому на этой стадии выделяется теплота $Q_2 = A_2 - \Delta E_2 = \frac{(n+k)^2}{2n^2k^2}C\mathcal{E}^2$. Она распределяется между диодом, который ведет себя как сопротивление $R_D = \frac{U_0}{I_0} = \frac{k}{n}r$ и внутренним сопротивлением источника r , пропорционально их сопротивлениям. Значит, $Q_{D2} = \frac{k}{k+n}Q_2 = \frac{n+k}{2n^2k}C\mathcal{E}^2$. Полное количество теплоты, выделившееся на диоде за обе стадии $Q_D = \frac{2nk - n - k}{2n^2k}C\mathcal{E}^2$, поэтому доля диода в общем тепловыделении $\frac{Q_D}{Q} = \frac{2nk - n - k}{n^2k}$. **Ответ:** $Q = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = 5,76$ мДж; $\eta = \frac{2nk - n - k}{n^2k} = 17\%$

Оптика

П.26. На поверхности грани AB преломления луча не происходит, поскольку падение на эту грань является нормальным. Поэтому луч падает на грань AC под углом α . Для выхода из грани AC в глицерин луч не должен испытать на этой грани полное внутреннее отражение. Данное требование означает, что $\frac{n_{ст}}{n_{гл}} \sin \alpha < 1$, откуда $\alpha < \arcsin \left(\frac{n_{гл}}{n_{ст}} \right)$. Отметим, что для практически полного выхода луча в глицерин через эту грань нужно еще обеспечить отсутствие отражения луча от границы раздела «стекло–глицерин», поскольку, как нетрудно убедиться, луч, отраженный от грани AC в случае $\alpha < \arcsin \left(\frac{n_{гл}}{n_{ст}} \right) \approx 59,8^\circ$, не испытает полного внутреннего отражения и от грани BC .

Ответ: $\alpha < \arcsin\left(\frac{n_{\text{гл}}}{n_{\text{ст}}}\right) \approx 59,8^\circ$.

П.27. Световой луч испытывает преломление на двух поверхностях (рис. 51). При использовании закона преломления учтем малость углов падения и преломления, заменяя синусы углов на сами углы в радианной мере. Тогда угол падения на первую из поверхностей, где имеет место преломление, равен α , а угол преломления $\beta = \frac{n_1}{n_2} \alpha$. Угол падения γ на вторую поверхность – это

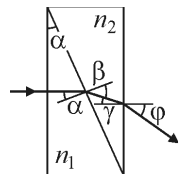


Рис. 51

разность углов β и α . Имеем $\gamma = \beta - \alpha = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) \alpha$. И, наконец, искомый угол поворота луча – угол преломления на второй поверхности, т.е. $\varphi = n_2 \gamma = (n_1 - n_2) \alpha = \Delta n \cdot \alpha$. **Ответ:** $\varphi = \Delta n \cdot \alpha = 1,2^\circ$.

П.28. Рассмотрим ход лучей от источника в шаре (рис. 52). Все лучи, прошедшие через шар, пересекаются с лучом, проходящим через центр шара, если при любом угле падения луча α на поверхность шара для угла преломления будет выполняться условие $2\beta < \alpha$.

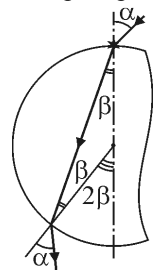


Рис. 52

Учитывая, что эти углы не превосходят 90° , можно записать это требование в виде $\sin \alpha > \sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta$. В соответствии с законом преломления $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$, а

$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n}$. Поэтому требование, сформулированное в условии, будет выполнено, если для любого $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ справедливо неравенство

$2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} < n^2$. Как видно, прежде всего, это требование должно быть выполнено для α , стремящегося к нулю, (если оно выполнено для малых α , то автоматически выполнится и для остальных). Значит, $2n < n^2$, откуда $n > 2$. **Ответ:** показатель преломления $n > 2$.

П.29. Прежде всего заметим, что луч, выходящий из оптического центра линзы, идет вдоль ее главной оптической оси. Это означает, что источник находится на главной оптической оси линзы. Построив продолжение луча, выходящего из точки A , найдем положение мнимого изображения источника, находящегося от линзы на расстоянии $b = l \cdot \operatorname{ctg} \alpha$. Согласно формуле линзы, расстояние a от источника до

линзы определяется из соотношения $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{F}$, т.е.

$$a = -\frac{Fb}{F+b} = \frac{Fl}{F \operatorname{tg} \alpha - l}. \quad \text{Ответ: } a = \frac{Fl}{F \operatorname{tg} \alpha - l} \approx 79,6 \text{ см.}$$

П.30. Прежде всего заметим, что при использовании тонкой собирающей линзы в качестве лупы (то есть для рассматривания прямых увеличенных изображений) мы должны наблюдать мнимое изображение с заметным увеличением, для чего предмет должен находиться чуть ближе к линзе, чем ее фокальная плоскость. Поскольку расстояние до нити лампы очень велико, то ее изображение в первом опыте должно наблюдаться в фокальной плоскости линзы. Значит, фокусное расстояние линзы $F \approx l$. Во втором опыте расстояние от глаза до изображения заметно больше фокусного расстояния линзы, и глаз должен находиться достаточно близко к линзе, поэтому можно считать, что расстояние от линзы до изображения примерно равно L . Теперь, воспользовавшись формулой линзы $\frac{1}{a} - \frac{1}{L} \approx \frac{1}{l}$, найдем расстояние a от линзы до рассматриваемых фрагментов текста: $a \approx \frac{Ll}{L+l}$. Значит, $\Gamma \approx \frac{L}{a} \approx \frac{L}{l} + 1$.

Ответ: $\Gamma \approx \frac{L}{l} + 1 = 6$.

П.31. Поскольку при отодвигании экрана радиус светлого пятна на экране плавно увеличивается, то лучи, вышедшие из линзы, расходятся, а это возможно только если изображение источника мнимое. После линзы лучи идут от этого изображения. Обозначив через b расстояние от линзы до изображения источника (длину отрезка OS' на рис. 53), из подобных треугольников имеем

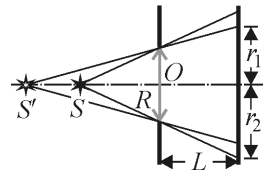


Рис. 53

$\frac{b}{R} = \frac{L+b}{r_1}$, откуда $b = \frac{LR}{r_1 - R}$. После того, как линзу уберут, светлое пятно на экране будут создавать лучи, идущие напрямую от источника. Вводя для расстояния от источника до ширмы обозначение $a = |OS|$, имеем равенство $\frac{a}{R} = \frac{L+a}{r_2}$, откуда $a = \frac{LR}{r_2 - R}$. Из формулы линзы, а именно $\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{r_2 - r_1}{LR}$, находим, что $F = \frac{LR}{r_2 - r_1}$.

Ответ: $F = \frac{LR}{r_2 - r_1} = 18$ см.

П.32. Из условия ясно, что ось пучка совпадает с главной оптической осью линзы, и пучок является параксиальным, так как угол падения крайнего луча на выпуклую поверхность линзы и угол преломления его для плоской поверхности малы. Преломление луча на выпуклой поверхности и ход луча внутри линзы не зависит от того, погружена плоская сторона в воду или нет, поэтому крайний луч в обоих случаях выйдет из линзы в одной и той же точке, находящейся на некотором расстоянии r от оси линзы. Затем луч попадет в фокус линзы, т.е. в воздухе он пересечет оптическую ось на расстоянии $F = 1/D$ от линзы, а в воде – на расстоянии h . Поэтому тангенс угла преломления этого луча для

плоской поверхности равен $\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{F} = Dr$ в воздухе и $\operatorname{tg} \beta' = \frac{r}{h}$ в воде.

Для малых углов тангенсы, как и синусы, примерно равны самим углам в радианной мере, поэтому $\frac{\operatorname{tg} \beta'}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{1}{Dh} \approx \frac{\sin \beta'}{\sin \beta}$. С другой стороны, по

закону преломления: $\sin \beta' = \frac{n_{\text{л}}}{n} \sin \alpha$, $\sin \beta = n_{\text{л}} \sin \alpha$, где $n_{\text{л}}$ – коэффициент преломления материала линзы, n – коэффициент преломления воды, а α – одинаковый в обоих случаях угол падения крайнего луча на плоскую поверхность линзы (показатель преломления воздуха мы приняли равным единице). Следовательно, $n \approx Dh = 1,35$.

Ответ: $n \approx Dh = 1,35$.

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ – 2014/2015»

I. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Задание для 7-х – 9-х классов

I.1. Обозначим через v_a и v_m модули скоростей автомобиля и мальчика, через L длину моста, а через x – расстояние от автомобиля до начала моста в момент подачи звукового сигнала. Поскольку мальчик и автомобиль достигают заданной точки одновременно, то справедливы равенства $\frac{\alpha L}{v_m} = \frac{x}{v_a}$ (когда мальчик бежит навстречу автомобилю) и $\frac{(1-\alpha)L}{v_m} = \frac{x+L}{v_a}$ (когда мальчик бежит в ту же сторону, что и автомобиль). Исключая из этих равенств L и x , находим искомое отношение скоростей $\frac{v_a}{v_m} = \frac{1}{1-2\alpha}$. **Ответ:** $n = \frac{1}{1-2\alpha} = 2$.

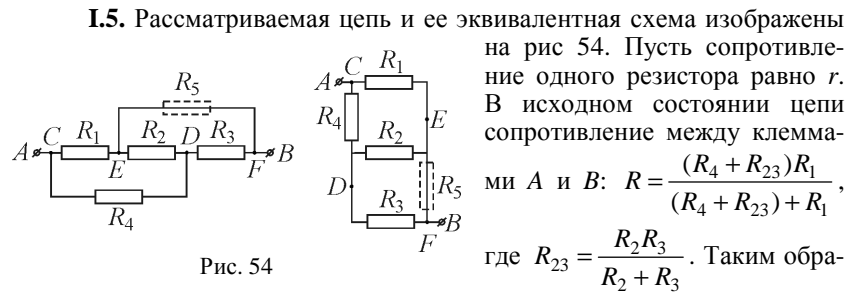
I.2. Объем детали равен $V = \frac{m}{\rho_2}$, объем пустот в ней $v = \frac{M}{\rho_1} \cdot \frac{x}{100\%}$. Из равенства $M = \rho_1(V - v)$ находим, что $x = \left(\frac{m\rho_1}{M\rho_2} - 1 \right) \cdot 100\%$. **Ответ:** $x = \left(\frac{m\rho_1}{M\rho_2} - 1 \right) \cdot 100\% = 5,3\%$

I.3. Поступающая от кипятильника энергия частично идет на нагревание воды, а частично передается окружающим телам, т.е. расходуется на потери, которые возрастают с увеличением разности температуры воды и температуры окружающей среды. Вода никогда не закипит, если при некоторой температуре, не достигшей температуры кипения, мощность потерь q становится равной мощности кипятильника N , т.е. $q = N$. Полагая, что в небольшом температурном интервале $\Delta t = 1^\circ\text{C}$ мощность потерь практически постоянна, из уравнения теплового ба-

ланса при выключенном кипятильнике имеем: $cm\Delta t = q\tau$. Из приведенных соотношений следует, что $\tau = \frac{cm\Delta t}{N}$. **Ответ:** $\tau = \frac{cm\Delta t}{N} = 5$ с.

I.4. Пусть $F_{\text{сопр}} = \alpha v$ – сила сопротивления движению автомобиля, где α – коэффициент сопротивления. Работа, совершенная двигателем при перемещении автомобиля на расстояние s равна $A = F_{\text{сопр}}s$. С другой стороны, эту работу можно выразить через расход топлива m как $A = mq\eta$. Из записанных выражений следует равенство: $mq\eta = \alpha vs$. Полагая $m = m_1$, $v = v_1$, находим, что $\alpha = \frac{m_1q\eta}{sv_1}$. Поскольку мощность, развиваемая двигателем, $N = F_{\text{сопр}}v$, при движении автомобиля со скоростью v_2 имеем: $N = \alpha v_2 \cdot v_2 = \frac{m_1q\eta v_2^2}{sv_1}$.

Ответ: $N = \frac{m_1qv_2^2}{sv_1} \cdot \frac{\eta}{100\%} = 47,5$ кВт.



зом $R = \frac{3}{5}r$. После включения резистора R_5 в разрыв проводника, соединяющего точки E и F , образуется цепь, в которой в силу симметрии ток через резистор R_2 не течет. Следовательно, резистор R_2 можно мысленно удалить. Тогда $R' = \frac{(R_1 + R_5)(R_3 + R_4)}{(R_1 + R_5) + (R_3 + R_4)} = r$. Поэтому $R' = \frac{5}{3}R$.

Ответ: $R' = \frac{5}{3}R = 25$ Ом.

I.6. Непосредственным построением (см. рис. 55 а) легко убедиться в том, что размер изображения и его положение не зависят от положения зеркала в том случае, когда палочка находится в фокальной плоскости линзы. При этом размер изображения совпадает с размером предмета. Таким образом, по результатам первого опыта устанавливаем, что фокусное расстояние линзы $F = a$. Построение изображения во втором опыте изображено на рис. б. При построении учтено, что лучи, идущие от палочки, после преломления в линзе и отражения от зеркала, вторично преломляются в линзе. В частности луч, идущий к линзе параллельно главной оптической оси, после выхода из линзы пересекает оптическую ось в середине отрезка OF . Отсюда следует, что фокусное расстояние оптической системы, состоящей из тонкой линзы и прижатого к ней плоского зеркала, равно $F/2$. Применяя для этой системы формулу тонкой линзы, имеем $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{2}{F}$. На рис. 55 б видно, что увеличение, даваемое системой, $\Gamma = \frac{l_1}{l} = \frac{d}{c}$. По условию $\Gamma = 2$. Из записанных выражений следует, что $c = \frac{3}{4}a$. Искомое смещение $b = a - c = \frac{1}{4}a$.

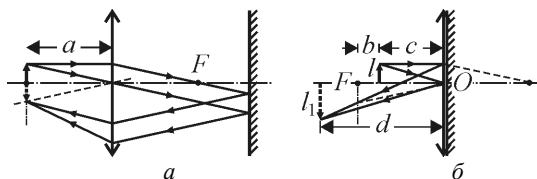


Рис. 55

Ответ. $b = \frac{a}{4} = 3$ см.

Задание для 10-х – 11-х классов

Первый тур

I.7. Поскольку соударение пули с бруском является кратковременным, смещение бруска за время соударения пренебрежимо мало и сила упругости в момент соударения не возникает. Следовательно, суммарный импульс пули и бруска во время соударения сохраняется: $mv = (m + M)u$, где u – скорость бруска с застрявшей в нем пулей сразу после соударения. При последующем движении бруска и пули сохраня-

ется механическая энергия, причем при достижении максимального сжатия пружины брусок с пулей останавливается. Следовательно, $\frac{(m+M)u^2}{2} = \frac{k\Delta l^2}{2}$. Из записанных выражений получаем, что $v = \frac{\Delta l}{m} \sqrt{(M+m)k}$. **Ответ:** $v = \frac{\Delta l}{m} \sqrt{(M+m)k} = 150$ м/с.

И.8. Обозначим скорости тела в точках A и B через \vec{v}_A и \vec{v}_B , соответственно. По законам равноускоренного движения имеем: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{g}\tau$ и $\vec{AB} = \vec{v}_A\tau + \frac{\vec{g}\tau^2}{2}$. Из записанных уравнений следует, что $\vec{v}_A = \frac{\vec{AB}}{\tau} - \frac{\vec{g}\tau}{2}$, $\vec{v}_B = \frac{\vec{AB}}{\tau} + \frac{\vec{g}\tau}{2}$. Таким образом, \vec{v}_A и \vec{v}_B представляют собой диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\frac{\vec{AB}}{\tau}$ и $\frac{\vec{g}\tau}{2}$ как на сторонах (см. рис. 56) Поскольку по условию векторы \vec{v}_A и \vec{v}_B взаимно перпендикулярны, этот параллелограмм есть ромб, и потому длины векторов $\frac{\vec{AB}}{\tau}$ и $\frac{\vec{g}\tau}{2}$ равны. Отсюда $AB = \frac{g\tau^2}{2}$.

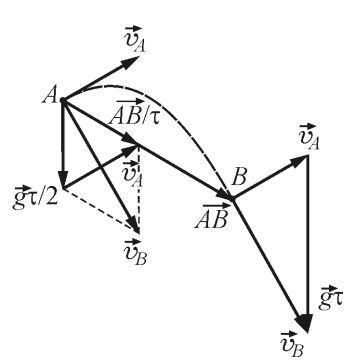


Рис. 56

Ответ: $AB = \frac{g\tau^2}{2} = 20$ м.

И.9. Пусть в сосуде первоначально было N_0 структурных единиц (молекул) водорода. Внутренняя энергия водорода, имеющего температуру T , равна $U = N_0 \frac{5}{2} kT = \frac{N_0}{N_A} \cdot \frac{5}{2} RT$, где N_A – постоянная Авогадро, $R = kN_A$ – универсальная газовая постоянная. Вводя обозначение

$\nu = \frac{N_0}{N_A}$, имеем $U = \frac{5}{2}\nu RT$. Будем считать, что при нагревании водорода на $\Delta T = 1$ К его молекулы не диссоциировали на атомы. По первому закону термодинамики для изохорного нагревания потребуется количество теплоты, равное увеличению внутренней энергии, т.е. $Q = \frac{5}{2}\nu R\Delta T$.

Пусть во втором эксперименте температуру водорода увеличили до T_1 и αN_0 его молекул диссоциировали на атомы. Теперь в сосуде находится $N = 2\alpha N_0 + (1 - \alpha)N_0 = (1 + \alpha)N_0$ структурных единиц: $2\alpha N_0$ атомов водорода и $(1 - \alpha)N_0$ молекул водорода. Внутренняя энергия водорода в этих условиях $U_1 = \left(\frac{3}{2} \cdot 2\alpha\nu + \frac{5}{2}(1 - \alpha)\nu\right)RT_1 = \frac{1}{2}(\alpha + 5)\nu RT_1$. Для изохорного нагревания водорода на $\Delta T = 1$ К теперь потребуется количество

теплоты $Q_1 = \frac{1}{2} \cdot (\alpha + 5)\nu R\Delta T = \frac{1}{2}\alpha\nu R\Delta T + Q$. Из записанных равенств

находим долю диссоциировавших молекул, а именно $\alpha = \frac{5(Q_1 - Q)}{Q}$.

При изобарном нагревании газ совершает работу

$$A = (1 + \alpha)\nu R\Delta T = \frac{2Q}{5}(1 + \alpha) = 2Q_1 - \frac{8}{5}Q. \quad \text{Следовательно,}$$

$$Q_2 = Q_1 + A = 3Q_1 - \frac{8}{5}Q. \quad \text{Ответ. } Q_2 = 3Q_1 - \frac{8}{5}Q = 17 \text{ Дж.}$$

I.10. По второму закону Ньютона при установившемся движении стержня $T - F_A = 0$, где $T = Mg$ – натяжение нити, $F_A = IBl$ – сила Ампера, I – ток в контуре, l – расстояние между рельсами. По закону Ома $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$, где \mathcal{E} – ЭДС индукции. По закону электромагнитной индукции $\mathcal{E} = Bvl$. По закону Джоуля–Ленца $N = I^2R$. Из записанной системы

уравнений находим, что $v = \frac{N}{Mg}$. **Ответ:** $v_{\text{уст}} = \frac{N}{Mg} = 1,5$ м/с.

I.11. Ход лучей, ограничивающих пучок, изображен на рис. 57. Угол падения лучей на правую грань призмы равен 45° . Он превышает

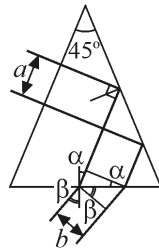


Рис. 57

критический угол полного отражения $\alpha_{\text{кр}} = \arcsin \frac{1}{n}$ для всего диапазона заданных в условии значений n , а именно, $1,5 \leq n \leq 2$. В частности, при $n = n_{\text{min}} = 1,5$, $\alpha_{\text{кр}} \approx 41,8^\circ$. Поэтому свет через правую грань в воздух не выходит. Рассмотрим преломление лучей на основании призмы. Из рис. 57 видно, что $\frac{a}{\cos \alpha} = \frac{b}{\cos \beta}$, где α –

угол падения луча на границу «стекло – воздух», β – угол преломления на этой границе. Отсюда $b = a \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$. Нетрудно уста-

новить, что $\alpha = 22,5^\circ$. Следовательно, $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

По закону преломления $\sin \beta = n \sin \alpha$. Поэтому

$$\cos \beta = \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - n^2 \frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{1 - \frac{n^2}{4} (2 - \sqrt{2})}.$$

Ответ: $b = 2 \frac{\sqrt{1 - n^2 (2 - \sqrt{2}) / 4}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} a = 7,6 \text{ мм.}$

Второй тур

I.12. Пусть после соударения шарик и брусок приобретают скорости u_1 и u_2 соответственно. По законам сохранения импульса и механической энергии имеем: $mv_0 = mu_1 + Mu_2$, $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2}$. Из

этой системы находим $u_2 = \frac{2m}{m+M} v_0$. Из закона сохранения энергии

при сжатии пружины следует, что $\frac{Mu_2^2}{2} = \frac{k(\Delta l)^2}{2}$.

Ответ: $\Delta l = \frac{2v_0}{(1 + M/m)} \sqrt{\frac{M}{k}} = 40 \text{ см.}$

1.13. Для того чтобы шарики столкнулись, левый шарик после отскока от плиты должен снова подняться на высоту H . Это максимальная высота, на которую он может подняться в условиях сформулированной задачи. Следовательно, после отскока он должен двигаться по такой же параболе, по которой и падал. По закону сохранения энергии находим скорость шарика в момент обрыва нити $v = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}$. Время падения шарика до плиты $\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}}$. Время полёта до правого (неподвижного) шарика $t_0 = 2\tau$. Горизонтальная дальность полёта – это начальное расстояние между шариками $L = vt_0 = 4\sqrt{Hl(1 - \cos \alpha)}$. Отсюда находим, что $\cos \alpha = 1 - \frac{L^2}{16Hl}$. **Ответ:** $\cos \alpha = 1 - \frac{L^2}{16Hl} = 0,19$.

1.14. Пусть p_0 – атмосферное давление, а S – площадь поршня. Уравнение состояния газа в начальный момент $p_0HS = \nu RT_0$. После начала перемещения поршня сила натяжения нити на поршень действовать не будет. Поэтому уравнение конечного состояния газа $(p_0 + \frac{mg}{S})nHS = \nu RT$. Изменение внутренней энергии газа равно $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T - T_0)$. Из первого закона термодинамики следует, что $Q = \Delta U + A$, где $A = \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)(n-1)HS$ – работа газа по перемещению поршня. Решая совместно записанные уравнения, находим, что $Q = \left(\frac{5}{2}n - 1\right)mgH + \frac{5}{2}\nu(n-1)RT_0$.
Ответ: $Q = \left(\frac{5}{2}n - 1\right)mgH + \frac{5}{2}\nu(n-1)RT_0 = 6,2$ кДж.

1.15. При исходном подключении конденсатора сила протекающего в цепи тока равна $I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}$, а напряжение на конденсаторе

$U = \frac{\xi R_1}{R_1 + R_2}$. Энергия заряженного конденсатора равна

$W_1 = \frac{CU^2}{2} = \frac{C}{2} \left(\frac{\xi R_1}{R_1 + R_2} \right)^2$. Если конденсатор включить вместо резисто-

ра R_2 , то его энергия станет равной $W_2 = \frac{C\xi^2}{2}$. Отсюда получаем отно-

шение энергий $k = \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2}$. **Ответ:** $k = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)^2 = 4$.

И16. Ход луча изображен на рис. 58. По закону преломления $\sin \alpha = n_1 \sin \beta$. Явление полного внутреннего отражения на границе «стекло–жидкость» будет иметь место, если $n_1 \sin \gamma = n_2$. Поскольку $\beta + \gamma = 90^\circ$, то $\sin \gamma = \cos \beta$.

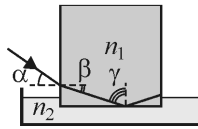


Рис. 58

Имеем $\sin \alpha = n_1 \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = n_1 \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}$. Следова-

тельно, $\sin \alpha = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$.

Ответ: $\alpha = \arcsin \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 66^\circ$.

II. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Задание для 7-х – 9-х классов

И1. Так как время, проведенное школьниками в пути, из-за дождя не изменилось, средняя скорость автобуса на всем пути совпадает с его скоростью на начальном отрезке, т.е. $v_{\text{ср}} = v_1$. Путь, пройденный автобусом за время дождя, равен $v_2 \tau$. Время, за которое после дождя автобус проехал оставшееся расстояние, равно $\frac{S}{v_3}$. Время, затраченное автобусом с момента начала дождя до момента прибытия к музею, равно времени, которое потребовалось бы для преодоления того же рас-

стояния со скоростью $v_{\text{ср}} = v_1$. Таким образом, $\tau + \frac{S}{v_3} = \frac{v_2\tau + S}{v_1}$. Отсюда да $\tau = \frac{S(v_3 - v_1)}{v_3(v_1 - v_2)}$. **Ответ:** $\tau = \frac{S(v_3 - v_1)}{v_3(v_1 - v_2)} = 20$ мин.

II.2. Количества теплоты, поглощенные льдом и азотом, соответственно равны $Q_{\text{л}} = \lambda m$, $Q_{\text{аз}} = r\rho \frac{V}{2}$. Исходя из условия, что скорость поступления теплоты пропорциональна разности температур снаружи и внутри сосуда, можно записать, что $\frac{Q_{\text{л}}}{\tau_{\text{л}}} = k(t_0 - 0^\circ\text{C})$, $\frac{Q_{\text{аз}}}{\tau_{\text{аз}}} = k(t_0 - t_{\text{аз}})$, где k – коэффициент пропорциональности. Из написанных уравнений находим $\tau_{\text{л}} = \frac{2\lambda m(t_0 - t_{\text{аз}})}{\rho r V(t_0 - 0^\circ\text{C})} \tau_{\text{аз}}$. **Ответ:** $\tau_{\text{л}} = \frac{2\lambda m(t_0 - t_{\text{аз}})}{\rho r V(t_0 - 0^\circ\text{C})} \tau_{\text{аз}} \approx 21,5$ ч.

II.3. Пусть U – напряжение сети. Тогда $N_{01} = \frac{U^2}{R_1}$, $N_{02} = \frac{U^2}{R_2}$, где R_1 и R_2 – сопротивления плиток. Отсюда $R_1 = \frac{U^2}{N_{01}}$, $R_2 = \frac{U^2}{N_{02}}$. При параллельном подключении плиток полная мощность равна $N_1 = N_{01} + N_{02}$. При их последовательном подключении полная мощность $N_2 = \frac{U^2}{R_1 + R_2} = \frac{N_{01}N_{02}}{N_{01} + N_{02}}$. Таким образом, справедлива следующая система уравнений: $N_{01} + N_{02} = N_1$, $N_{01}N_{02} = N_1N_2$. Разрешая ее относительно N_{01} , N_{02} , получаем, что $N_{01} = \frac{N_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{N_1^2 - 4N_1N_2}$, $N_{02} = \frac{N_1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{N_1^2 - 4N_1N_2}$.

Ответ: $N_{01} = \frac{N_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{N_1^2 - 4N_1N_2} = 600$ Вт;

$N_{02} = \frac{N_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{N_1^2 - 4N_1N_2} = 300$ Вт.

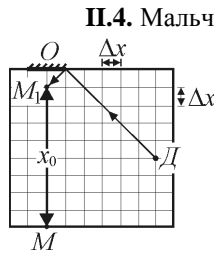


Рис. 59

II.4. Мальчик начнет видеть в зеркале изображение девочки в тот момент, когда луч света, идущий от девочки и отраженный от правого края зеркала, впервые попадет мальчику в глаза. Положение мальчика в этот момент обозначено на рис. 59 точкой M_1 . Из рисунка находим, что расстояние между точками M и M_1 равно $x_0 = 8\Delta x$. При равноускоренном движении мальчик переместится на $x_1 = \frac{v_0 t_0}{2}$. Время его равно-

номерного движения $t_1 = \frac{x_0 - x_1}{v_0}$. Из записанных выражений получаем,

$$\text{что полное время движения мальчика } \tau = \frac{t_0}{2} + \frac{x_0}{v_0} = \frac{t_0}{2} + \frac{8\Delta x}{v_0}.$$

Ответ: $\tau = \frac{t_0}{2} + \frac{8\Delta x}{v_0} = 8,5 \text{ с.}$

Задание для 10-х – 11-х классов

II.5. Для описания движения шарика будем использовать координатную систему XOY с началом в точке вылета шарика из пушки, ось OX направим горизонтально, а ось OY – вертикально. Уравнение траектории шарика в выбранной системе имеет вид:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \text{ Положив } x = L, y = H \text{ и введя обозначение}$$

$\xi = \operatorname{tg} \alpha$, получим квадратное уравнение относительно ξ , а именно

$$\xi^2 - \frac{2v_0^2}{gL} \xi + \left(1 + \frac{2v_0^2 H}{gL^2}\right) = 0. \text{ По теореме Виета корни этого уравнения}$$

удовлетворяют равенствам $\xi_1 + \xi_2 = \frac{2v_0^2}{gL}$, $\xi_1 \xi_2 = 1 + \frac{2v_0^2 H}{gL^2}$. Согласно

условию данное уравнение имеет единственное положительное решение

$$\xi_1 = \xi_2 = \operatorname{tg} \alpha_0. \text{ Это возможно, если } \frac{v_0^2}{gL} = \operatorname{tg} \alpha_0 \text{ и } 1 + \frac{2v_0^2 H}{gL^2} = \operatorname{tg}^2 \alpha_0. \text{ От-}$$

$$\text{сюда } H = L \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_0 - 1}{2 \operatorname{tg} \alpha_0} = -L \operatorname{ctg} 2\alpha_0. \text{ Ответ: } H = -L \operatorname{ctg} 2\alpha_0 = 10 \text{ м.}$$

II.6. Так как давление p газа на поршень уравнивается действием пружины, то $p = \frac{kx}{S}$, где k – жёсткость пружины, S – площадь сечения поршня, а x – деформация пружины, причем $x = \frac{V}{S}$. Таким образом, в рассматриваемом процессе $p \sim V$. При увеличении объема газа от V_1 до $V_2 = nV_1$ давление газа станет равным $p_2 = np_1$. Согласно первому закону термодинамики, количество теплоты, полученное газом, $Q = \Delta U + A$, где $\Delta U = \frac{3}{2} \nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1)$ – изменение внутренней энергии газа, $A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)$ – работа, совершенная газом при расширении. С учетом того, что $\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}$, находим, что $A = \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_1V_1)$. **Ответ:** $Q = 2p_1V_1(n^2 - 1) = 600$ Дж.

II.7. Напряженность электрического поля, созданного заряженными пластинами в зазоре между ними, по модулю равна $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Поэтому пластинка прижимается к правой плите с силой $F = \frac{q\sigma}{\epsilon_0}$. Сила трения скольжения между пластинкой и плитой изменяется по линейному закону от нуля в верхнем положении пластинки до μF в ее нижнем положении. Следовательно, работа силы трения на перемещении пластинки из верхнего в нижнее положение равна $A_{\text{тр}} = -\frac{1}{2}\mu F \cdot b = -\frac{\mu q\sigma b}{2\epsilon_0}$. По закону изменения механической энергии имеем равенство $\frac{mv^2}{2} - mgb = A_{\text{тр}}$. Из записанных уравнений находим, что $v = \sqrt{b\left(2g - \frac{\mu q\sigma}{\epsilon_0 m}\right)}$. **Ответ:** $v = \sqrt{b\left(2g - \frac{\mu q\sigma}{\epsilon_0 m}\right)} = 1$ м/с.

П.8. На рис. 60 *a* показан ход крайнего луча падающего на линзу пучка света в случае, когда показатель преломления среды за линзой равен n_1 , а перед линзой находится воздух.

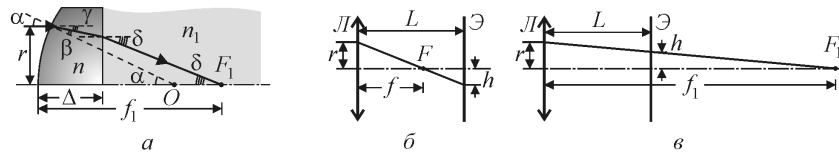


Рис. 60

Так как по условию пучок света узкий и линза тонкая, то все углы на рисунке являются малыми, мала и толщина Δ линзы по сравнению с ее фокусным расстоянием. Согласно закону преломления $\beta = \frac{\alpha}{n}$, $\delta = \gamma \frac{n}{n_1}$.

Поскольку $\gamma = \alpha - \beta = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\alpha$, то $\delta = \frac{n-1}{n_1}\alpha$. Учитывая, что $r = \alpha R = \delta f_1$, получаем, что в рассматриваемом случае падающий пучок должен собираться за линзой на расстоянии $f_1 = R \frac{n_1}{n-1}$. Если же линза

находится в воздухе, то её фокусное расстояние равно $f = \frac{R}{n-1}$. Со-

гласно рис. 60 *б* и *в* $\frac{h}{r} = \frac{L-f}{f} = \frac{f_1-L}{f_1}$, а потому $\frac{1}{f} + \frac{1}{f_1} = \frac{2}{L}$. Следова-

тельно, $n_1 = \frac{L(n-1)}{2R-L(n-1)}$.

Ответ: $n_1 = \frac{L(n-1)}{2R-L(n-1)}$, если $L < \frac{2R}{n-1}$; иначе решения нет.

ПРОФИЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН 2015

I. Механика

I.1. Тела движутся под действием сил, изображенных на рис. 61, где $m_{1,2}\vec{g}$ – силы тяжести, $\vec{N}_{1,2}$ – нормальные составляющие сил реакции призм, $\vec{T}_{1,2}$ – силы натяжения нитей, $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения скольжения. По второму закону Ньютона имеем:

$m_1 a_1 = m_1 g \sin \alpha - T_1 - \mu m_1 g \cos \alpha$ (для левого груза), $m_2 a_2 = T_2 - m_2 g \sin \beta$ (для правого груза). Кроме того, справедливы равенства, вытекающие из условия, что нити нерастяжимы и невесомы, а именно $a_2 = 2a_1$, $T_1 = 2T_2$. Решая записанную систему уравнений, находим, что $a_1 = \frac{(m_1 \sin \alpha - 2m_2 \sin \beta - \mu m_1 \cos \alpha)}{m_1 + 4m_2} g$.

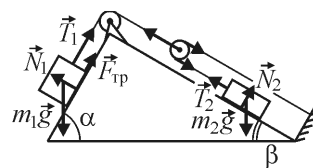


Рис. 61

Ответ: $a_1 = \frac{(m_1 \sin \alpha - 2m_2 \sin \beta - \mu m_1 \cos \alpha)}{m_1 + 4m_2} g \approx 0,22 \text{ м/с}^2$.

I.2. Согласно второму закону Ньютона изменение импульса лягушки за время τ равно импульсу суммы сил, действующих на лягушку, за это же время. Поскольку на лягушку действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции доски \vec{R} , то изменение импульса лягушки $m\Delta\vec{v} = (m\vec{g} + \vec{R})\tau$. Учтем, что до прыжка лягушка покоилась, и разложим силу реакции доски на две составляющие: нормальную к доске \vec{N} и касательную к ней \vec{F} . Тогда закон изменения импульса лягушки в проекции на вертикальное и горизонтальное направления принимает вид: $mv \sin \alpha = (N - mg)\tau$, $mv \cos \alpha = F\tau$. По третьему закону Ньютона сила, с которой лягушка действует на доску, равна по модулю и противоположна по направлению силе реакции доски \vec{R} . Поскольку по условию доска остается неподвижной, $F = F_{\text{тр}}$, где $F_{\text{тр}}$ – модуль силы трения покоя, удерживающий доску на месте. Сила нормального давления

доски на стол в момент прыжка лягушки равна $N_0 = N + Mg$. По закону сухого трения сила трения покоя удовлетворяет неравенству $F_{\text{тр}} \leq \mu N_0$.

Решая записанную систему, находим, что $\mu \geq \frac{mv \cos \alpha}{mv \sin \alpha + (M + m)g\tau}$.

Ответ: $\mu \geq \frac{mv \cos \alpha}{mv \sin \alpha + (M + m)g\tau} \approx 0,06$.

1.3. Модуль работы силы трения на всем перемещении линейки можно представить в виде суммы трех слагаемых: $A = A_0 + A_1 + A_2$. Здесь $A_0 = \mu_1 mgl$ – модуль работы силы трения на перемещении линейки по левой панели до стыка с правой панелью (m – масса линейки), A_1 – модуль работы силы трения, действующей со стороны левой панели, на перемещении линейки с левой панели на правую панель. Обозначив через x длину той части линейки, которая находится на левой панели, для модуля силы трения, действующей со стороны левой панели, имеем

$F_1 = \mu_1 \frac{mg}{l} x$. Заметим, что эта сила изменится в зависимости x линейно в пределах от $\mu_1 mg$ до нуля. Поэтому модуль работы силы F_1 на перемещении l равен $A_1 = \frac{1}{2} \mu_1 mgl$. Аналогично можно найти модуль работы

силы трения F_2 , действующей со стороны правой панели, на том же перемещении: $A_2 = \frac{1}{2} \mu_2 mgl$. При мы предполагаем, что линейка остановилась, оказавшись целиком в правой панели. Применив теорему об изменении кинетической энергии, получим равенство

$$\frac{mv^2}{2} = \mu_1 mgl + \frac{1}{2} \mu_1 mgl + \frac{1}{2} \mu_2 mgl.$$

Отсюда находим максимальную величину коэффициента трения μ_2 , а именно $\mu_{2\text{max}} = \frac{v^2}{gl} - 3\mu_1$.

Ответ: $\mu_{2\text{max}} = \frac{v^2}{gl} - 3\mu_1 = 0,35$.

II. Молекулярная физика и термодинамика

II.1. Внутренняя энергия идеального одноатомного газа $U = \frac{3}{2} \nu RT$, т.е. $U \sim T$. Поскольку участок 1–2 – отрезок параболы, то и $T \sim V^2$. Из уравнения состояния газа $pV = \nu RT$ следует, что на этом участке $p \sim V$. Работу по сжатию газа найдём, вычислив площадь фигуры под графиком $p = p(V)$, т.е. трапеции (рис. 62). Имеем

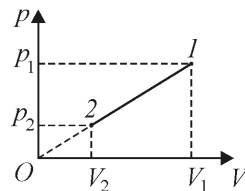


Рис. 62

$A = \frac{1}{2}(kp_2 + p_2)(kV_2 - V_2) = \frac{1}{2}(k^2 - 1)p_2V_2$. Из сравнения выражений $U_2 = \frac{3}{2} \nu RT_2$ и $p_2V_2 = \nu RT_2$ следует, что $p_2V_2 = \frac{2}{3}U_2$, а значит искомая работа равна $A = \frac{k^2 - 1}{3}U_2$. Учитывая, что $U_2 = \frac{1}{k^2}U_1$, получаем окончательно, что $A = \frac{k^2 - 1}{3k^2}U_1$. **Ответ:** $A = \frac{k^2 - 1}{3k^2}U_1 = 40$ кДж.

II.2. Поскольку в начальном состоянии пар в цилиндре является насыщенным, и число молей воздуха равно числу молей пара, то парциальное давление сухого воздуха в этом состоянии равно $p_{\text{возд}0} = p_{\text{нас}}$. При медленном расширении смеси в 4 раза вся вода испарится, а пар останется насыщенным, т.е. относительная влажность воздуха сохранится равной 100%. Для того чтобы относительная влажность воздуха уменьшилась до 50%, нужно увеличить объем смеси еще в два раза. Таким образом, конечный объем смеси равен восьми начальным объемам.

Следовательно, конечное давление сухого воздуха $p_{\text{возд}к} = \frac{p_{\text{нас}}}{8}$. Искомое давление влажного воздуха $p = p_{\text{возд}к} + p_{\text{пара}к} = \frac{p_{\text{нас}}}{8} + \frac{p_{\text{нас}}}{2} = \frac{5}{8}p_{\text{нас}}$. **Ответ:** $p = \frac{5}{8}p_{\text{нас}} \approx 1,46$ кПа.

II.3. Состояние водяного пара описывается уравнением $p = nkT$, где p – давление пара, $n = 2N/V$ – концентрация молекул пара, N –

число молекул пара, T – его абсолютная температура. Отсюда $N = \frac{pV}{2kT}$. Таким образом, начальное число молекул пара $N_{\text{нач}} = \frac{p_{\text{нас}}V}{2kT_1}$, где $T_1 = 273 + t_1 = 309$ К. Учтем, что при температуре $T_0 = 273 + t_0 = 373$ К давление насыщенного водяного пара совпадает с нормальным атмосферным давлением p_0 . Число молекул пара при равно $N_{\text{кон}} = \frac{p_0V}{2kT_0}$. Следовательно, $\Delta N = N_{\text{кон}} - N_{\text{нач}} = \frac{p_0V}{2kT_0} \left(1 - \frac{p_{\text{нас}}}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T_1} \right)$.

Ответ: $\Delta N = \frac{p_0V}{2k(t_0 + 273)} \left(1 - \frac{p_{\text{нас}}}{p_0} \cdot \frac{t_0 + 273}{t_1 + 273} \right) \approx 1,8 \cdot 10^{22}$.

III. Электродинамика

III.1. После соединения конденсаторов напряжения на них установятся одинаковыми, а их суммарный заряд останется равным первоначальному заряду первого конденсатора, т.е. $U_2 = U_1$,

$(C_1 + C_2)U_1 = C_1\mathcal{E}$. Следовательно, $U_1 = \frac{C_1\mathcal{E}}{C_1 + C_2}$. После замыкания кон-

денсаторов проводником с большим сопротивлением они полностью разрядятся, а выделившееся при этом количество теплоты практически будет равно электрической энергии, которой обладали конденсаторы до

замыкания, а именно, $Q = \frac{(C_1 + C_2)U_1^2}{2}$. Из написанных соотношений

следует, что $\mathcal{E} = \frac{\sqrt{2Q(C_1 + C_2)}}{C_1}$. **Ответ:** $\mathcal{E} = \frac{\sqrt{2Q(C_1 + C_2)}}{C_1} \approx 424$ В.

III.2. Сопротивление цепи при замкнутом ключе K равно $\frac{5R}{3}$.

Поэтому до размыкания ключа сила тока, протекающего через источник,

равна $I = \frac{3\mathcal{E}}{5R}$, а напряжение на конденсаторе равно $U = \frac{2}{3}RI = \frac{2\mathcal{E}}{5}$.

Запасённая в конденсаторе энергия $W = \frac{CU^2}{2} = \frac{2C\mathcal{E}^2}{25}$ выделится в виде

теплоты на резисторах R и $2R$ после размыкания ключа в количествах, обратных пропорциональных их сопротивлениям, т.е. на резисторе $2R$

выделится $1/3$ часть этой энергии. Отсюда получаем, что $Q = \frac{2C\mathcal{E}^2}{75}$.

Ответ: $Q = \frac{2C\mathcal{E}^2}{75} = 4 \cdot 10^{-6}$ Дж, или 4 мкДж.

III.3. В исходном состоянии конденсатор зарядится до разности потенциалов \mathcal{E} . После перебрасывания ключа K в положение 2 конденсатор полностью разрядится и в цепи, состоящей из резисторов R_1 , R_2 и

R_3 , выделится количество теплоты $Q = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$. Поскольку в последовательной цепи количества теплоты, выделяющиеся на отдельных резисторах, пропорциональны их сопротивлениям, то

$$Q_1 = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3}. \text{ Отсюда } \mathcal{E} = \sqrt{\frac{2Q_1}{C} \cdot \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1}}.$$

Ответ: $\mathcal{E} = \sqrt{\frac{2Q_1}{C} \cdot \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1}} = 10$ В.

IV. Оптика

IV.1. Угол φ , на который призма отклоняет падающий на нее пучок света, определяется формулой $\varphi = \beta - \alpha$ (см рис. 63). Здесь β – угол преломления, определяемый законом Снеллиуса $n \sin \alpha = \sin \beta$, или $n\alpha \approx \beta$. Отсюда $\varphi \approx (n-1)\alpha$. Параллельный пучок лучей линза собирает в побочном фокусе. При этом луч, идущий через центр линзы, не преломляется. Отсюда $x = F \cdot \tan \varphi \approx F \cdot \varphi \approx F \cdot (n-1)\alpha$.

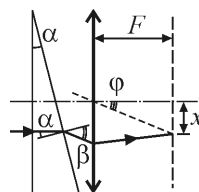


Рис. 63

Ответ: $x \approx (n-1)\alpha F = 5$ см.

IV.2. Построение действительного изображения I и мнимого изображения I_1 предмета Π показано на рис. 64. Для исходного положения линзы использованы сплошные линии, для смещенного – штриховые. Используя обозначения, приведенные на рис. 64, по формуле

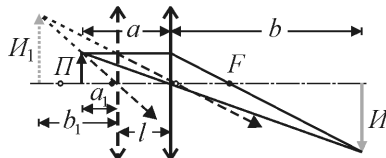


Рис. 64

тонкой линзы имеем: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ (для исходного положения линзы),
 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1} = \frac{1}{F}$ (для смещенного ее положения). Увеличение предмета в
 первом случае определяется выражением $\Gamma = \frac{b}{a} = \frac{F}{a-F}$, а во втором
 случае $\Gamma_1 = \frac{b_1}{a_1} = \frac{F}{F-a+l}$. Учитывая, что по условию $\Gamma_1 = \Gamma$, из этих
 выражений получаем, что $F = a - \frac{l}{2}$. **Ответ:** $F = a - \frac{l}{2} = 6$ см.

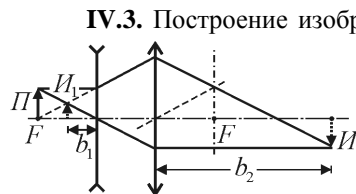


Рис. 65

IV.3. Построение изображения I предмета P , которое дает система линз, показано на рис. 65. Видно, что размер изображения совпадает с размером предмета, т.е. $\Gamma = 1$. Этот же результат можно получить путем расчета. Рассеивающая линза формирует мнимое изображение предмета I_1 . Расстояние b_1 от рассеивающей линзы до этого изображения согласно формуле тонкой линзы $\frac{1}{F} - \frac{1}{b_1} = -\frac{1}{F}$ равно $b_1 = \frac{F}{2}$, а увеличение этого изображения $\Gamma_1 = \frac{b_1}{F} = \frac{1}{2}$. Изображение I_1 играет роль предмета для собирающей линзы и находится на расстоянии $F + b_1 = \frac{3}{2}F$ от нее. По формуле $\frac{2}{3F} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{F}$ находим, что расстояние от линзы до даваемого ею изображения $b_2 = 3F$, а увеличение этого изображения $\Gamma_2 = \frac{b_2}{1,5F} = 2$. Увеличение, даваемое системой линз, $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = 1$. **Ответ:** $\Gamma = 1$.

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ СТАРШИХ КЛАССОВ НА ФИЗИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ РАБОТАЮТ:

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

для учащихся 10-х и 11-х классов. Занятия платные, проходят два раза в неделю с 17.30 до 20.00. Набор в школу осуществляется ежегодно в сентябре-октябре по результатам собеседования. Занятия по математике и физике проводят ведущие профессора и доценты факультета. Получить информацию о школе Вы можете с 16.00 до 18.00 по телефону **(495) 939-38-78**.

ВЕЧЕРНЯЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ШКОЛА

для учащихся 8-х – 9-х классов. Занятия ведут студенты-старшекурсники и аспиранты факультета. Обучение в школе бесплатное. Семинары проходят в вечернее время с 17 до 19 часов. Набор в школу производится в конце сентября и продолжается в течение учебного года. Получить информацию о ВФШ можно по телефону **(495) 939-11-19**.

ВЕЧЕРНЯЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

для учащихся 9-х – 11-х классов. Школа работает при Государственном астрономическом институте имени П.К. Штернберга (ГАИШ) и Астрономическом обществе. Обучение в школе бесплатное. Занятия проходят в ГАИШ. Набор в школу производится в течение всего учебного года. Получить информацию о школе можно по телефону **(495) 932-88 44**.

СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР МГУ (ШКОЛА им. А.Н.КОЛМОГорова)

для прошедших по конкурсу учащихся из Москвы и других регионов Российской Федерации. Обучение рассчитано на один год (11-й класс), или на 2 года (10-й – 11-й классы). Занятия ведут профессора и преподаватели Московского университета. Учащиеся, успешно окончившие школу, получают рекомендацию для поступления на физический и другие естественные факультеты МГУ.

Адрес СУНЦ МГУ: 121357, Москва, ул. Кременчугская, д.11. Телефон приемной комиссии **(499) 445-11-08**.

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБРАЗОВАНИЯ

предлагает старшеклассникам дистанционные подготовительные курсы по физике и математике. Обучение платное. Курсы ведут профессора и преподаватели физфака МГУ. Для того чтобы стать слушателем Центра, необходимо наличие компьютера и доступ к сети Интернет. Справки по телефону **(495) 939-39-79** или на сайте <http://distant.phys.msu.ru/>.

Учебное издание

ФИЗИКА

ЗАДАЧИ ПРОФИЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА
И ОЛИМПИАД ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ В МГУ – 2015
(с подробными решениями)

Оригинал-макет: *Чесноков С.С.*

Напечатано с готового оригинал-макета

Подписано в печать 26.11.2015 г. Печать офсетная. Бумага офсетная.
Формат 60x88 1/16. Усл.печ.л. 6,0. Тираж 1000 экз. Изд. № 292.

Издательство ООО «МАКС Пресс»
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.

119991, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова
2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8(495)939-3890/91. Тел./Факс 8(495)939-3891.

Отпечатано в ППП «Типография «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., 6
Заказ № 1833